

**CORPORACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN
EN MATERIALES S.A. DE C.V.**



“Análisis de un sistema difuso con respuesta multivariada”

TESIS

Para obtener el Grado Académico de

**Maestro en Ciencia y Tecnología en la Especialidad de Ingeniería Industrial y
de Manufactura**

Presenta:

Isaac Esaú Cerda Durán

Saltillo, Coahuila Diciembre de 2016

"Análisis de un sistema difuso con respuesta multivariada"

Por
Isaac Esaú Cerda Durán

Tesis

Presentada al Programa Interinstitucional en Ciencia y tecnología

Sede

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales, S.A. de C.V.

Como requisito parcial para obtener el Grado Académico de

Maestría en Ciencia y Tecnología
en Ingeniería Industrial y de Manufactura

Programa Interinstitucional en Ciencia y Tecnología COMIMSA / CONACyT

Saltillo, Coahuila Diciembre de 2016

Agradecimientos

A **Dios**, porque sin duda esta etapa de mi vida no hubiera sido posible sin su bendición, fortaleza y provisión.

A mis padres **Ezequiel Cerda Viera** y **Hortensia Durán Mandujano**, porque sin ustedes no habría sido posible este logro, por su amor incondicional, a su apoyo durante todos estos años por su ejemplo de trabajo y esfuerzo que hoy guía mi vida.

A mi hermano **Francisco Ezequiel Cerda Durán** y a su esposa **Miriam Gamboa Rodríguez** porque en el momento más difícil sus palabras y acciones fueron fundamentales para que este momento fuera posible y porque su ejemplo sigue marcando mi vida.

A mi hermano **Eliezer Cerda Duran** porque siempre estas para mí, por ser la persona de quien más aprendo y que con sus pláticas hacen que olvide lo malo del día.

A mi tutor, **Dr. Rolando Javier Praga Alejo**, por compartir sus conocimientos, tiempo, esfuerzo, por motivarme y por tener la confianza en mí para este proyecto, además de sus consejos y observaciones que me hicieron crecer como persona y como estudiante.

A mi asesor, **Dr. David Salvador González González** por su tiempo, sus consejos y preguntas que me han ayudado para revolucionar mi manera de pensar.

Y ambos, porque sin duda la mayor lección de humildad la recibí de ustedes.

A los académicos que de manera directa o indirecta contribuyeron con mi formación académica, **Dr. Pedro Pérez Villanueva**, **Dr. Arturo Reyes**.

A los **doctores** con quienes tuve oportunidad de conocer en clase y de quienes aprendí mucho.

Al **personal administrativo del posgrado** de COMIMSA por su apoyo en cada actividad que realicé en mi formación académica

Agradezco a **El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)** y a la **Corporación Mexicana de Investigación en Materiales** por todos los apoyos que recibí durante la realización de mi programa académico ya que sin su apoyo este logro no hubiera sido posible

A mis amigos por ser ese apoyo que nunca falla.

Resumen

Hoy en día la industria ha incrementado sus procesos de manufactura y con ello la complejidad de estos, debido a ello necesitan herramientas capaces de análisis y toma de decisiones para cada uno de sus procesos.

Los sistemas de inferencia difusa forman parte de los sistemas inteligentes que permiten construir modelos para procesos de manufactura. A pesar de que estos sistemas inteligentes permiten la modelado de variables con incertidumbre y utiliza el conocimiento experto para la construcción del modelo se presentan dificultades al analizar dichos modelos, ya que a pesar de que la mayoría de los procesos tengan múltiples respuestas el análisis estadístico que se realiza en los modelos se hace de manera univariada sin comprobar que no exista correlación entre las respuestas, además de utilizar el ANOVA si comprobar los supuestos para dicho análisis. Este trabajo propone el uso de los sistemas de inferencia difusos para el modelado y predicción en los procesos de manufactura con varias variables de respuestas y aplicar un análisis estadístico por medio de herramientas como el MANOVA comprobando los supuestos para su aplicación. Lo anterior nos permitirá verificar si el modelo construido representa la variabilidad del proceso.

La metodología propuesta se desarrolló en un proceso de fundición en molde permanente y por gravedad, donde las métricas estadísticas mostraron que el modelo representaba la variabilidad del proceso.

Palabras clave: *Sistemas de inferencia difuso, modelado de procesos, MANOVA*

Índice

Capítulo 1.....	1
Introducción	1
Capítulo 2.....	3
Planteamiento del problema	3
2.1 Descripción del problema	4
2.2 Preguntas de Investigación	9
2.3 Hipótesis.....	10
2.4 Objetivo General	10
2.5 Objetivos Específicos	10
2.6 Justificación	11
2.7 Delimitaciones	12
Capítulo 3.....	13
Estado del arte.....	13
3.1 Conclusiones del estado del arte	16
Capítulo 4.....	17
Marco teórico.....	17
Lógica difusa	17
Conjunto difuso	17
Función de membresía.....	18
Variable lingüística	20
Operadores difusos	20
Reglas Si-Entonces.....	21
Fuzzyficación.....	22
Mecanismo de inferencia	22
4.2 Análisis múltiple de la varianza (MANOVA).....	28
a) Prueba de correlación.....	29
b) Pruebas de normalidad.	31

c) Prueba de autocorrealación.....	34
d) Prueba de heterocedasticidad.....	34
e) Análisis de la varianza multivariado (MANOVA)	35
f) Coeficiente de determinación	36
Capítulo 5.....	38
Metodología.....	38
Capítulo 6.....	42
Experimentación con datos históricos.....	42
Proceso de maquinado.....	43
Proceso de colada.....	50
Manufactura de corazones	59
Capítulo 7.....	64
Aplicación.....	64
Proceso de colada para la elaboración de contrapesos	64
Capítulo 8.....	72
Conclusiones.....	72
Bibliografía.....	75
Anexo	79

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día la industria ha crecido de manera acelerada gracias a que muchos de sus procesos se llevan a cabo de manera automatizada, pero aún y cuando estos procesos se llevan a cabo de esa forma la mayoría de ellos se busca controlar y mejorar además de predecir ciertos resultados en cada uno de estos procesos. Por lo anterior es necesario conocer la forma en que las variables del proceso se relacionan, esto es, como interactúan o afectan las variables de entrada a las variables de salida

Para conocer la relación que existe entre dichas variables es necesario construir un modelo, el cual represente el sistema, esto es, modelar el proceso en cuestión, ya sea un proceso de soldadura, maquinado, etc.

Este modelo puede construirse de manera estadística, matemática y también mediante los sistemas inteligentes.

Hoy en día los sistemas inteligentes ya que son una herramienta que permite construir mejores modelos, sobre todo cuando estos son altamente no lineales, en esta rama las redes neuronales, los algoritmos genéticos, los sistemas difusos y sus híbridos son los que más se utilizan para dicha tarea.

Gracias a los sistemas inteligentes muchos de los procesos industriales pueden ser modelados, esto es, se puede definir de manera más adecuada las variables de entrada y su relación con las variables de salida.

Para lo anterior es importante tomar en cuenta que para lograr un mejor modelo es indispensable conocer el proceso, lo cual, se puede lograr cuando se incorpora el conocimiento de expertos. Este conocimiento proviene de información lingüística que describe ciertas etapas del proceso y es de mucha utilidad cuando los valores de entrada y salida del sistema son difíciles de definir, por ejemplo “la pieza tiene poca rugosidad, “la temperatura es muy alta”, es decir las variables son difusas. Es entonces donde los modelos difusos son capaces de incorporar este tipo de información (información lingüística) de una mejor manera que un cualquier otro modelador convencional. Además de lo anterior los modelos difusos son capaces de manejar la no linealidad, esto es de gran utilidad ya que la mayoría de los sistemas en ingeniería son no lineales.

Otra característica importante de estos sistemas es su interpretación, ya que tiene una estructura transparente, esto quiere decir que cada regla en el modelo actúa como un “modelo local” lo cual permite el modelo sea más comprensible.

Además de las ventajas mencionadas su principal ventaja sobre otros tipos de aproximadores como redes neuronales y regresores no paramétricos es la facilidad de representar el conocimiento con sus reglas si-entonces, el mecanismo de razonamiento en términos humanos entendibles y la capacidad de combinar la información lingüística de los expertos con la información numérica.

Así en el presente trabajo se realizó una aplicación con un proceso de fundición en molde permanente por gravedad donde se obtuvo un modelo que represento la variabilidad del proceso esto gracias a las métricas estadísticas multivariadas.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

Hablando de un proceso de manufactura, cuales fuera, es común que exista más de una respuesta o salidas del proceso, estas pueden ser las características de calidad en una pieza, si no exista correlación entre las variables de salida se realizan modelos independientes para cada respuesta y así el modelo tendrá conclusiones correctas.

Al tener en cuenta esto la mayoría del análisis que se realiza en este tipo de modelos se centra en buscar la variable que tenga mayor influencia sobre cada una de las respuestas, es decir, cual variable es más significativa en el proceso (aplicar un análisis de la varianza ANOVA por sus siglas en inglés). Para realizar el análisis anterior se asume que cada respuesta es independiente, es decir, que entre ellas no existe relación alguna, pero por lo general y sobre todo al modelar procesos de manufactura no se cumple.

Debido a la condición anterior y aunado a la necesidad de construir un modelo que permita predecir y controlar además de optimizar las respuestas del proceso cuando sea requerido es necesario realizar un análisis de la relación entre cada una de las salidas ya que al realizarlo podremos asegurar los supuestos necesarios para realizar, dependiendo de las condiciones, un ANOVA o un Análisis de la varianza Multivariado (MANOVA por sus siglas en inglés) según sea el caso, pero, si esto es ignorado al construir un modelo se tienen principalmente las siguientes consecuencias:

- Se produce un porcentaje de error en el valor de la respuesta real versus la de predicción.

- Si las respuestas están altamente correlacionadas obtenemos soluciones las cuales están alejadas del valor especificado.
- El análisis realizado para encontrar la variable con mayor impacto en el modelo es incorrecto, ya que no cumple con el supuesto de independencia entre las variables.

Aún y cuando la condición anterior (correlación entre las respuestas) es una característica evidente y presente en la mayoría de los sistemas y procesos, hay casos donde se intenta evitar dicha característica de relación, por medio de la combinación de las mismas, de manera que, se construye una sola respuesta. Al utilizar esta metodología se tiene un inconveniente el cual evita que podamos analizar de manera independiente cada respuesta

- No se logra un análisis adecuado e independiente de las respuestas.

Además de lo anterior si se quisiera optimizar (maximizar o minimizar) una respuesta en particular, la metodología ya mencionada evita encontrar los mejores parámetros en una región.

2.1 Descripción del problema

Por lo anterior se puede asumir que cuando se modela cualquier proceso es necesario realizar un análisis de las respuestas, ya que éste nos permitirá identificar si realizamos un modelo independiente en caso de que las variables de respuesta lo sean o aplicamos otro método para abordar la correlación entre ellas. El asumir independencia entre las respuestas genera algunas problemáticas ya vistas y en particular es conveniente revisar cómo algunos autores que realizan un modelo sin tomar en cuenta la correlación entre las respuestas e.g.:

Sharma et al., utiliza la función de deseabilidad para la optimización del modelo difuso para el torneado de GFRP donde dicho proceso tiene tres respuestas. El análisis de correlación entre sus respuestas es el siguiente:

Tabla 2.1 Análisis de Correlación

	Ra	MRR
MRR	-0.321 ¹	
	0.102 ²	
VB	0.064 ¹	0.634 ¹
	0.750 ²	0.000 ²
1. Coeficiente de correlación de Pearson		
2. Valor de probabilidad		

Los autores mencionan “*The analysis of variance (ANOVA) of composite deirability was performed at 95% confidence level to figured out the most influencing parameters among v, f and d. The results depicts that the depth of cut (d) is the most significant parameter followed by feed (f) and cutting speed (v).*” Determinaron mediante un ANOVA que el parámetro que más impacta en el modelo es la profundidad de corte, dicha conclusión no se puede realizar ya que 2 de las variables tienen correlación, ya que en el caso de VB y MRR existe una correlación muy alta.

Kumar et al., realizan la optimización de múltiples características en el corte láser sobre una hoja de Duralumin por medio de lógica difusa y Taguchi, donde se tienen 3 variables de respuesta que son KWt, KDt y KDb, y su análisis de correlación se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2.2 Análisis de Correlación

	KW	KDt
KDt	0.137 ¹	
	0.494 ²	
KDb	0.227 ¹	0.756 ¹
	0.255 ²	0.000 ²
1. Coeficiente de correlación de Pearson		
2. Valor de probabilidad		

Los autores mencionan “*Analysis of variance (ANOVA) has been carried out to find the relative effect of different control facts on multi-response (FMPI), shows that control factor A (gas pressure) and C (pulse frequency) are significant*”. Por medio de un ANOVA determinaron que el gas y la frecuencia del pulso eran las variables de mayor impacto en el modelo, pero de igual manera al realizar un análisis de correlación se puede observar que ésta existe entre las variables KDt y KDb, por lo tanto, dicha conclusión no es válida.

Sainia et al., realizan la optimización de respuesta múltiple durante el torneado de CNC usando Taguchi Fuzzy donde se tienen 3 variables de respuesta las cuales son (SNR), (MRR) y (SNR, dB), de las cuales se tiene el siguiente análisis de correlación entre ellas dando como resultado la siguiente tabla:

Tabla 2.3 Análisis de Correlación

	SNR	MRR
MRR	-0.483 ¹	
	0.011 ²	
SNR dB	-0.344 ¹	0.954 ¹
	0.079 ²	0.000 ²
1. Coeficiente De correlación de Pearson		
2. Valor de probabilidad		

Aunque no se menciona la manera en que se obtuvo, los autores mencionan “*Amongst selected independent parameters, feed is found to be the most significant parameter followed by depth of cut and spindle speed for surface roughness while depth of cut is most significant parameter for material removal*”.

rate followed by feed and spindle speed the results are presented through", mencionan que el parámetro más significativo es la alimentación, seguido la profundidad de corte para la rugosidad de la superficie, mientras que la profundidad de corte es el más significativo, seguido por la velocidad de alimentación para el índice de remoción de metal. Se puede observar que la conclusión no es válida, ya que existe la correlación entre las variables MRR y SNR y también entre las variables SNR dB y MRR por lo que es necesario realizar un análisis multivariado de dicho modelo.

En los casos anteriores se asumió que las respuestas eran independientes lo cual por medio de los análisis de correlación demostramos que es incorrecto y que es necesario realizar un análisis diferente (multivariado) para evitar errores al realizar la inferencia en este tipo de modelos.

Además de los autores anteriores Salmasnia et al., en su modelo realiza una combinación lineal de las respuestas, lo cual "evita" o "resuelve" la dependencia entre las respuestas, pero como lo comentamos esto evita mejorar las respuestas de manera independiente.

Lo anterior nos muestra la necesidad y deficiencia que existe en la construcción y análisis de sistemas difusos para modelar procesos cuando estos tienen múltiples respuestas y éstas se encuentran correlacionadas.

Una parte de suma importancia en el análisis de los sistemas difusos es el proceso de defuzzyficación el cual es parte fundamental en la construcción del modelo. Para esta transformación se tiene que una variable difusa se convierte a una variable real o continua (crisp), es decir, es el proceso inverso a la fuzzyficación. Esta transformación se puede realizar mediante varios métodos, aquí mostramos algunos ejemplos.

El más usado en la actualidad es el "Centro de área" o "Centro de gravedad" también conocido como "Centroide", este método permite encontrar el área bajo una función de membresía, en el caso continuo se define como

$$z_c^* = \frac{\int \mu_C(z) \cdot z dz}{\int \mu_C(z) dz} \quad (2.1)$$

Y para el caso discreto se construye de la siguiente manera.

$$z_d^* = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_C(z_i) \cdot z_i}{\sum_{i=1}^m \mu_C(z_i)} \quad (2.2)$$

En ambos casos z_c^* y z_d^* es el centro de área, el cual es el valor defuzzificado de la combinación del traslape de cada uno de los consecuentes de las reglas del sistema de inferencia difuso, donde z_i son los valores reales (crisp) que puede tomar la respuesta, $\mu_C(z_i)$ es el valor difuso asociado al valor z_i .

Otro método que se utiliza también es bisección de área el cual divide el área del polígono en 2 para obtener la respuesta, y se define de la siguiente manera.

$$\int_{\alpha}^{z_{BOA}} \mu_A(x) dx = \int_{z_{BOA}}^{\beta} \mu_A(x) dx \quad (2.3)$$

Donde $\alpha = \min\{z|z \in Z\}$ y $\beta = \max\{z|z \in Z\}$, esta línea en algunas ocasiones coincide con la línea del centroide.

Estos solo son 2 de una gran variedad de métodos por los cuales se puede llevar a cabo el proceso de defuzzyficación.

Para ambos casos como para los faltantes es necesario resolver la integral o la sumatoria para encontrar nuestro valor real (crisp), en todos los casos se resuelve de manera univariada, es decir, una integral o sumatoria para cada respuesta, pero

¿Qué ocurriría en el proceso de defuzzyficación si las respuestas están correlacionadas?,

¿Acaso es necesario utilizar una doble integral?

$$z^* = \frac{\int \int \mu_C(z) \cdot z dz}{\int \int \mu_C(z) dz} \quad (2.4)$$

O ¿será necesaria una doble sumatoria?

$$z^* = \frac{\sum \sum_{i=1}^m \mu_C(z_i) \cdot z_i}{\sum \sum_{i=1}^m \mu_C(z_i)} \quad (2.5)$$

Por lo anterior también se realizará un análisis de estos procesos para conocer su funcionamiento a detalle y verificar si existen cambios en ellos cuando la defuzzyficación se realiza con variables correlacionadas.

Lo anterior nos motiva el siguiente trabajo ya que a pesar de que los sistemas de inferencia difusos son utilizados para el modelado de procesos no se analizan estadísticamente de manera correcta.

Debido a esto se plantea lo siguiente:

2.2 Preguntas de Investigación

- ¿Cómo se realiza el proceso de defuzzyficación en un sistema difuso cuando sus respuestas están correlacionadas?

- ¿Qué métricas estadísticas se utilizan para medir la eficiencia de un modelo construido por medio de un sistema de inferencia difuso?
- ¿Cómo se aplican dichas métricas?
- ¿Cómo se aplica un análisis multivariado a un sistema de inferencia difuso?

2.3 Hipótesis

H_1 : El proceso de defuzzyficación es afectado cuando las respuestas están correlacionadas.

H_2 : El análisis multivariado de las respuestas en el modelo difuso permitirá realizar una inferencia más acertada para las variables de entrada y salida.

2.4 Objetivo General

- Analizar el modelo creado por medio sistema difuso con respuestas multivariadas.

2.5 Objetivos Específicos

- Construir un modelo multivariado mediante un sistema difuso
- Crear una metodología para el análisis de modelos creaos por medio de un sistema de inferencia difuso.
- Realizar un análisis de los supuestos para el ANOVA y MANOVA en cada uno de los modelos.
- Hacer un estudio de los procesos de defuzzyficación para respuestas múltiples correlacionadas.

2.6 Justificación

Actualmente en la industria es necesario para el análisis y control de procesos la utilización de herramientas que permitan predecir, analizar o controlar el comportamiento de ciertos procesos, además en algunos casos se desea que el proceso se realice de una manera más eficiente.

Hoy en día pueden ser modelados por medio de los sistemas difusos, esto trae como ventaja el análisis específico de ciertas variables tanto de entrada como de salida las cuales representan dicho proceso, además de permitir de cierta manera el control del mismo en casos específicos.

Estos modeladores en particular son capaces de manejar información lingüística dada por los expertos en los procesos, esto facilita la comprensión del proceso y permite crear un modelo para cada variable de entrada.

Los sistemas difusos son capaces de modelar sistemas altamente no lineales, esto es, que pueden modelar procesos los cuales sea complicado establecer una relación entre las variables de entrada y de salida. Esta dificultad se presenta con frecuencia en la mayoría de los procesos.

Otra de sus ventajas es su manera de representar ciertos conocimientos respecto al proceso por medio de sus reglas si-entonces, las cuales por medio de sencillas conexiones permite construir un modelo adecuado para cada variable.

Sabemos que la mayoría de los procesos reales tienen más de una respuesta, es por ello que es necesario realizar un análisis en el sistema difuso de estas respuestas mediante herramientas estadísticas (ANOVA) y (MANOVA) que nos permitan realizar la inferencia adecuada en el modelo y tener mayor comprensión del mismo.

2.7 Delimitaciones

En este proyecto se trabajará con sistemas difusos para el modelado de un proceso con las características antes planteadas. El modelo será analizado en la parte de las respuestas, y dependiendo de los resultados que se obtengan de dicho análisis se recurrirá al análisis más adecuado (univariado o multivariado) para realizar la inferencia correspondiente al modelo.

Además, el análisis también incluirá al proceso de defuzzyficación, ya que si las salidas están correlacionadas es necesario analizar si el proceso sufre algún cambio o no con esta característica, de ser así, hay que verificar que tipo de cambios sufre el proceso.

Capítulo 3

Estado del arte

Dentro de la búsqueda de artículos relacionados con lo descrito en el planteamiento del problema encontramos lo siguiente:

Pavel Kovac et al., (2014) construyeron un modelo difuso de múltiples salidas para la temperatura de corte y la vida de la herramienta de fresado frontal, donde lograron con un 90 % de confianza la adecuación del modelo y éste puede ser usado para predecir con buena precisión.

Sharma et. al., (2014) realizaron un modelo por medio de lógica difusa del torneado de GFRP (Glass fiber-reinforced polymer por sus siglas en inglés) y su optimización utilizando el análisis de la función de deseabilidad por medio del cual encontraron que el valor más alto del compuesto de deseabilidad fue $d_G = 0.6094$ obtenido en el ensayo 21 del experimento, además de que por medio de un ANOVA el compuesto de deseabilidad mostró que la profundidad de corte (d) es el parámetro más significativo.

Lo anterior muestra que los sistemas difusos modelan de manera adecuada este tipo de procesos, por ejemplo, Kumar et al., (2011) realizaron el modelo difuso y la optimización del corte láser en una hoja de Duralumin, en por medio de un modelo difuso (FMPI) que optimizaron las salidas de dicho modelo. Además, con un ANOVA encontraron que las variables de entrada con mayor influencia en el modelo son la presión de gas y la frecuencia de pulso respectivamente.

Continuando con el proceso de corte o remoción Sharma et al., (2011) por medio de un modelo Taguchi difuso modelaron el proceso de corte de carbón por medio de tecnología tipo chorro de agua, con un ANOVA encontraron que el parámetro

más significativa es la presión, además cuando se realizó la optimización del modelo se encontró la mejor combinación de entradas.

También en cuanto a la manufactura se refiere el torneado CNC es muy importante, debido a esto Saini et al., (2014) realizaron la optimización al modelo de torneado CNC por medio de una aplicación Taguchi-difusa, en la cual se encontró que el parámetro más significativo en el modelo es la alimentación (feed).

En los artículos descritos anteriormente encontramos que su principal característica es que son modelos con múltiples respuestas, por ello sabemos que es importantes hacer un análisis de este tipo de artículos.

Por lo anterior Bashiri et al., (2009) por medio de la teoría de conjuntos difusos optimiza la superficie de múltiples respuestas, primero realizando modelos de regresión difusos para cada respuesta, luego por medio de la función de deseabilidad transforma el modelo con múltiples respuestas a uno con 2, y para terminar por medio de un grado de satisfacción el modelo termina con una sola respuesta, método que ejemplificó numéricamente.

También en el proceso de soldadura podemos ver la aplicación de la lógica difusa, éste es el caso de Parida et al., (2015) realizan una optimización de un modelo de soldadura por fricción-agitación con múltiples características de calidad mediante fuzzy assisted grey taguchi.

Además de lo anterior Liu et al., (2008) proponen un el método grey-fuzz logic con el cual optimizan el proceso de pintado de una placa, calculando sus coeficientes grises de relación y después fuzzyficando estas respuestas y obteniendo sus respectivas salidas difusas y después por medio de un ANOVA encontrando las variables óptimas del proceso.

El hecho de que la mayoría de los procesos reales tienen múltiples respuestas ha ocasionado atención en los investigadores, por ejemplo, Salmasnia et al., (2012) realizan un enfoque novedoso para la optimización de respuestas múltiples

basado en la función de deseabilidad y lógica difusa aquí para manejar la correlación entre las respuestas utilizaron ANFIS y la función de deseabilidad entre las respuestas.

Mohamad Jaya et al. (2014) implementó una nueva aproximación para predecir la rugosidad del recubrimiento en el nitrato de titanio mediante lógica difusa. Utilizaron las funciones de membresía triangulares y de campana para crear la base de reglas difusas. Las variables lingüísticas de entrada fueron la presión del N_2 y del Argón, la velocidad de la placa giratoria y la variable de salida fue la rugosidad de recubrimiento. El modelo construido con las funciones de membresía triangular tuvo un error residual de 7.85% mostrando la mejor aproximación, y el modelo construido con las funciones de campana mostro un error residual de 9.24%. Además, el modelo difuso construido mediante las funciones de membresía triangulares obtuvo un 95.05% de exactitud al predecir, esto quiere decir que este modelo tiene un buen desempeño al predecir. Por lo anterior los autores concluyen que los modelos difusos son una buena alternativa para predecir este tipo de rugosidad.

Latha & Senthilkumar (2015) modelan y analizan los parámetros de la rugosidad en una superficie de compuesto GFPR perforada por medio de un sistema difuso. Los autores mencionan que la respuesta obtenida y los valores que ya se tenían son valores muy cercanos, esto es, que el modelo es capaz de predecir la rugosidad de la superficie de una manera efectiva, además que el modelo construido mediante las funciones de membresía trapezoidales se comporta mejor que el modelo construido mediante las funciones de membresía triangulares. Y en particular uno de los principales resultados es que este modelo puede mejorar la calidad de la perforación, además de disminuir el trabajo de la construcción del modelo, su tiempo computacional y costo.

3.1 Conclusiones del estado del arte

La revisión de literatura nos muestra la amplia utilidad que tienen los sistemas de inferencia difusa en el modelado de procesos, sobre todo, los procesos los cuales son altamente no lineales, es decir, que sus respuestas no son lineales además de que permiten modelar variables con incertidumbre por medio de los conjuntos difusos y utilizar el conocimiento experto para la construcción del modelo.

La problemática en cada uno de los artículos ya mencionados es que no plantean una solución ante la correlación entre las variables de salida, además de omitir este análisis y suponer que dichas variables son independientes cuando no lo son. Lo anterior provoca que el análisis estadístico que se realiza en algunos de ellos sea erróneo, además de que no verifican los supuestos para la construcción de dicho análisis.

Lo anterior nos muestra la necesidad que hay en los sistemas de inferencia difusa en aplicar un análisis estadístico que cumpla con las necesidades del modelo construido, es decir, si el modelo es multivariado verificar si las respuestas tienen o no correlación, y dependiendo de esta característica se debe comprobar los supuestos para realizar el ANOVA o MANOVA y así verificar si el modelo construido representa la variabilidad del proceso.

Capítulo 4

Marco teórico

Lógica difusa

Lógica difusa es una transición de la verdad absoluta a la verdad parcial, la cual generaliza la lógica clásica de dos valores representando cada proposición con valores en el intervalo $[0,1]$. La lógica difusa no es difusa, más bien es una lógica precisa del razonamiento aproximado e impreciso (Zadeh 1975a, b, 1979, 2008)

Conjunto difuso

Un conjunto difuso A en el universo en discurso U es caracterizado por una función de membresía (MF) $\mu_A(x)$ la cual toma valores dentro de un intervalo $[0,1]$ (Zadeh 1965). Un conjunto difuso puede ser representado por un conjunto de pares ordenados de un elemento cualquiera x y su valor de membresía, esto es:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U\} \quad (4.1)$$

Cuando U es continua A generalmente se escribe como

$$A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (4.2)$$

Donde la integral no representa integración, denota la colección de todos los puntos $x \in U$ asociados con su función de membresía.

Cuando U es discreto A se escribe como

$$\sum_U \frac{\mu_A(x)}{x} \quad (4.3)$$

Donde la suma no representa la adición aritmética, denota la adición de todos los puntos $x \in U$ asociados con su función de membresía.

Un conjunto difuso tiene una sola función de membresía, esto es, debe haber una única función de membresía asociada con el conjunto difuso y a la vez, una función de membresía debe representar a un conjunto difuso.

Función de membresía

Las funciones de membresía están asociadas en primera instancia a la conexión entre una variable difusa y su conjunto, es decir representan el grado de pertenencia de una variable a su conjunto difuso. En particular son esenciales en la creación de sistemas difusos ya que deben ser representativas del espacio generado por las entradas y las salidas del mismo además de que estas afectan directamente el modelado y precisión del sistema y su rendimiento.

Dentro de las funciones de membresía encontramos las siguientes

- Función de membresía triangular

Esta función se especifica por medio de tres parámetros $\{a, b, c\}$ y se define de la siguiente manera.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } c \leq x \end{cases} \quad (4.4)$$

- Función de membresía trapezoidal

Esta función está definida por 4 parámetros $\{a, b, c, d\}$ y se define de la siguiente manera.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{si } d \leq x \end{cases} \quad (4.5)$$

Ambas funciones son las más utilizadas cuando se modelan procesos o cierto tipo de controladores.

- Función Gaussiana

La función gaussiana depende de 2 factores que son $\{m, \sigma\}$ y se define como:

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad (4.6)$$

Variable lingüística

En un sistema difuso si una variable (x) toma palabras o enunciados (alto, bajo, mucha potencia) como sus valores, a ésta se le denomina variable lingüística. Las palabras o variables lingüísticas son caracterizadas por conjuntos difusos definidos en el universo del discurso en el que se define variable.

En muchas ocasiones una sola palabra no puede definir de manera precisa a la variable estudiada, es por eso que se utilizan modificadores lingüísticos (hedges) que ayudan en este proceso. Los modificadores actúan dentro de los siguientes procesos:

- Intensificación y concertación
- Dilatación
- Fuzzyficación

Y se pueden representar de la siguiente forma $\{H, M, T, C\}$ dónde:

H : Es el conjunto de modificadores (muy, mucho, bastante, muy muy, etc.)

M : Marca (), [], { }

T : Conjunto de términos primarios

C : Conexiones

Operadores difusos

Cuando las entradas han sido fuzzyficadas gran parte del antecedente está realizada, pero si estos antecedentes están formados por 2 o más enunciados, entonces es necesario realizar una operación entre ellos para obtener el valor que represente el antecedente de esa regla, para ello utilizamos la operación AND y OR.

La operación AND permite obtener el valor que representa al antecedente de la regla por medio del mínimo y del producto algebraico.

A su vez la operación OR tiene esa misma cualidad solo que esta lo hace por medio del máximo y la suma algebraica.

A pesar de tener esto dos operadores se puede construir la operación AND y OR a conveniencia.

Reglas Si-Entonces

Esta parte es quizá la más esencial ya que es la que permite unir los antecedentes difusos con los consecuentes de igual manera difusos, estos, traducen el conocimiento y experiencia humana en reglas simples que crean la parte de la inferencia difusa.

Cuando decimos “si hace mucho calor entonces, subimos mucho el frio del A/A” (aire acondicionado) estamos creando un enunciado difuso el cual tiene un antecedente ‘si hace mucho calor’ y tiene una consecuencia ‘subimos mucho el frio’, es así como por medio de estos podemos crear un sistema de inferencia utilizando este tipo de reglas formadas no solamente con un antecedente sino con varios unidos por medio de una operación difusa los cuales tienen un consecuente o conclusión.

Es en esta parte donde se utilizan los operadores borrosos, ya que permiten realizar conexiones entre 2 o más enunciados difusos y unirlos con un consecuente, por ejemplo: “si la comida es buena o el servicio es bueno, entonces, dejaré buena propina”, donde resaltamos cada palabra que pertenece a un conjunto difuso además del conector que une 2 enunciados difusos y los asocia con su consecuente.

Por lo anterior se plantea que esta parte es la más importante dentro de un sistema difuso ya que, está forma por conexiones difusas las cuales se obtienen por medio del conocimiento o bien la ayuda de un experto en el proceso.

Fuzzyficación

Ésta es la primera parte en un sistema de inferencia difuso (SID) ya que es la sección donde las variables lingüísticas que pertenecen a un universo en discurso e.g. “hace mucho calor” dependiendo claramente del contexto, pertenece a un intervalo de temperatura el cual dependiendo del lugar puede ser $t \in [0,50]$ donde para cada valor de t en ese intervalo se le asociara un valor en el intervalo $[0,1]$ donde 0 y 1 nos muestran la pertenencia o exclusión de ese elemento en dicho conjunto difuso, y los valores diferentes a 0 y 1 nos muestran una pertenencia parcial a dicho conjunto.

Lo anterior se puede definir de la siguiente manera.

$$x \in U \xrightarrow{\mu_A(x)} \mu_A(x) \in [0,1] \quad (4.7)$$

Donde $x \in U$ y $\mu_A(x)$ es la función de membresía aplicada al elemento x y que éste tendrá un valor en el intervalo $[0,1]$ que será su valor de pertenencia al conjunto difuso.

Mecanismo de inferencia

La inferencia difusa es el proceso de formular un mapeo entre el espacio de las variables de entrada y el espacio de las variables de salida, este proceso involucra todas las funciones de membresía de entradas y salidas además de utilizar los operadores lógicos y las reglas si-entonces.

Dentro de los mecanismos de inferencia están 3 que son los más usados, los cuales se diferencian por sus reglas difusas, sus procesos de agregación y desfuzzificación, los cuales son:

- Mecanismo de inferencia Mamdani, Sugeno ó Tsukamoto

A continuación, se describirá a detalle cada uno de ellos.

Mecanismo de inferencia Mamdani

El modelado difuso tipo Mamdani es el más usado en la práctica, éste modelo se propuso como el primer intento de controlar una máquina de vapor y caldera por medio de un conjunto de reglas difusas obtenidas de la experiencia humana de un operador.

Éste modelo está formado por las siguientes reglas las cuales describen un mapeo de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r$ de W .

$$R_i: \text{IF } x_1 \in A_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_r \in A_{ir} \text{ then } y \in C_i$$

Donde x_j ($j = 1, 2, \dots, r$) son las variables de entrada, y es la variable de salida, A_{ij} y C_i son los conjuntos difusos de x_j y y respectivamente.

Mecanismo de inferencia Sugeno

Este sistema de inferencia conocido como TSK por sus creadores Takagi y Sugeno (1985) toma la parte del antecedente de la misma manera que el mecanismo anterior, su diferencia radica en que el consecuente es una función polinómica la cual se forma o depende de las variables de entrada. La principal motivación para el desarrollo de este modelo es reducir el número de reglas requeridas por el modelo Mamdani, especialmente en problemas muy complejos y o de grandes dimensiones.

Para alcanzar el propósito descrito antes el modelo reemplaza los conjuntos difusos en el consecuente (Entonces o then en inglés) del modelo Mamdani con una ecuación lineal la cual depende de las variables de entrada.

Por ejemplo, una regla con 2 variables de entrada y una de salida en el modelo TSK se describe de la siguiente manera

$$\text{If } x \in A \text{ and } y \in B \text{ then } z = ax + by + c$$

Donde a, b, c son constantes numéricas.

En general las reglas de un modelo TSK tienen la forma

$$\text{if } x_1 \in A_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_r \in A_{r1} \text{ then } y = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r) = b_{i0} + b_{i1}x_1 + \dots + b_{ir}x_r$$

Donde f_i es un modelo lineal y $b_{ij}(j = 0, 1, \dots, r)$ son los parámetros de valor real.

La inferencia realizada por el modelo TSK es una interpolación de todos los modelos lineales relevantes. Este grado de relevancia es determinado por el grado de pertenencia de los datos de entrada al sub-espacio difuso asociado con el modelo lineal. Estos grados se transforman en el peso en el proceso de la interpolación.

La salida total del modelo se describe por la siguiente ecuación

$$y = \frac{\sum_{i=1}^L \alpha_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^L \alpha_i (b_{i0}, b_{i1}x_1, \dots, b_{ir}x_r)}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} \quad (4.8)$$

Donde α_i es el grado de emparejamiento de la regla R_i .

Las entradas del modelo TSK son no difusas.

Sistema de inferencia Tsukamoto

En este sistema el consecuente de cada una de las reglas (Si-Entonces ó if-then en inglés) es representado por un conjunto difuso con una función de membresía monótona. Como resultado la salida inferida de cada regla es definida por un valor real. La salida total se toma como el promedio ponderado de cada regla. Dado que cada regla infiere una salida real, este sistema evita el proceso de desfuzzyficación.

Desfuzzyficación

Es el proceso inverso a la fuzzyficación. Matemáticamente es el proceso de transformar una cantidad difusa a una cantidad clásica, básicamente es un mapeo del espacio difuso a un espacio no difuso.

Existen varios métodos para realizar éste proceso, aunque se debe elegir cuidadosamente ya que en muchas ocasiones esta elección depende de la aplicación en la que se haya construido el sistema difuso.

A continuación, se presentan y describen algunos métodos los cuales se dividen en los siguientes grupos.

Métodos de área

El valor de desfuzzyficación divide el área bajo la función de membresía en dos o más o menos partes iguales. Estos métodos son matemáticamente elegantes y muy usados en los sistemas de control difuso, dentro de esta clasificación se encuentran los siguientes.

Bisector de área

El bisector de área Z_{BOA} es la línea vertical que divide el área en 2 partes iguales y se define como

$$\int_{\alpha}^{Z_{BOA}} \mu_A(x) dx = \int_{Z_{BOA}}^{\beta} \mu_A(x) dx \quad (4.9)$$

Donde $\alpha = \min\{z|z \in Z\}$ y $\beta = \max\{z|z \in Z\}$, esta línea en algunas ocasiones coincide con la línea del centroide.

Centro de gravedad o centro de área

Es el método de desfuzzyficación más usado, éste método encuentra el centroide del área bajo la función de membresía, y dependiendo del caso se define de la siguiente manera:

En el caso continuo está definida por

$$z = \frac{\int \mu_C(z) \cdot z dz}{\int \mu_C(z) dz} \quad (4.10)$$

Y en el caso discreto se está definida por

$$z = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_C(z_i) \cdot z_i}{\sum_{i=1}^m \mu_C(z_i)} \quad (4.11)$$

Donde z es el centroide del área, el cual es el valor ya desfuzzyficado del consecuente difuso.

A pesar de que éste método es el más usado hay que considerar que para encontrar z es necesario realizar una gran cantidad de cálculos, esto contribuye a un gasto de tiempo computacional además de ser necesaria mucha memoria para almacenar los datos.

Centro de sumas

En este proceso se realiza la suma algebraica individual de cada conjunto difuso para cada una de las respuestas en lugar de realizar el proceso con la unión de dichos conjuntos. Debido a lo anterior éste método se vuelve más rápido que el anterior, de manera discreta se define como

$$z = \frac{\sum_{i=1}^m z_i \cdot \sum_{k=1}^n \mu_k(z_i)}{\sum_{i=1}^m \cdot \sum_{k=1}^n \mu_k(z_i)} \quad (4.12)$$

Basados en este principio, existen varios métodos que permiten la desfuzzyficación los cuales se conocen como métodos de máxima:

- Selección aleatoria de máxima (RCOM)
- Primero de máxima (FOM)
- Último de máxima (LOM)
- Mitad de máxima (MOM)

Métodos de distribución y derivados

Este tipo de métodos transforman la función de membresía en una distribución de probabilidad y calculan el valor esperado. Su principal ventaja es la propiedad de

continuidad que estos tienen. Dentro de estos métodos enunciamos los más utilizados:

- a) Centro de gravedad (COG)
- b) Media de máxima (MeOM)
- c) Distribución básica de defuzzyficación (BADD)
- d) Defuzzyficación de nivel generalizado (GLSD)
- e) Centro de gravedad indexado (ICOG)
- f) Defuzzyficación semi-lineal (SLIDE)
- g) Media difusa (FM)
- h) Media difusa ponderada (WFM)
- i) Método de calidad (QM)
- j) Método de calidad extendido (EQM)

Métodos de máxima y sus derivados

Su función es seleccionar un elemento del núcleo del conjunto difuso como el valor de la defuzzyficación, su principal ventaja es la simplicidad de los mismos.

4.2 Análisis múltiple de la varianza (MANOVA)

Generalmente cuando hablamos del análisis de la varianza multivariado (MANOVA por sus siglas en inglés), hablamos de una extensión del análisis de la varianza univariado (ANOVA por sus siglas en inglés), este mide el efecto de varias variables independientes sobre una variable dependiente, mientras que el análisis multivariado permite medir el efecto de varias variables independientes sobre múltiples variables dependientes de manera simultánea.

Este análisis se realiza principalmente por dos razones:

1. No sólo proporcionan información del efecto de las variables independientes sobre cada variable dependiente, sino que también muestra las posibles interacciones entre estas, así es más fácil encontrar el factor de mayor importancia.
2. MANOVA permite evitar errores Tipo 1 los cuales ocurren cuando se realiza el ANOVA en cada variable dependiente.

MANOVA utiliza valores de la prueba F multivariada como lo son los criterios de Lambda de Wilk's, T de Hotelling.

A continuación, se presentan los supuestos bajo los cuales se puede realizar dicho análisis.

a) Prueba de correlación

El objetivo principal de un análisis de correlación es cuantificar la relación entre 2 variables métricas u ordinales (guía práctica de análisis de datos). Cuando existe correlación, es decir, hay un alto grado de relación entre 2 variables indica un alto grado de causa-efecto entre ellas, lo contrario no siempre es verdadero. Lo anterior se debe a que el análisis de correlación mide el grado de relación lineal entre dos variables.

Prueba de correlación de Pearson

Al tenerse 2 variable aleatorias es importante analizar cuál es la correspondencia entre estas, es decir, si la variable aleatoria X está relacionada con la variable aleatoria Y .

Éste análisis se denomina análisis de correlación el cual intenta medir la intensidad de la relación entre las 2 variables por medio de un número denominado coeficiente de correlación.

Éste coeficiente también se denomina coeficiente de correlación de Pearson donde r que es dicho coeficiente se define de la siguiente manera:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad (4.13)$$

Donde S_{xx} es la covarianza de (X, Y) , S_{xx} y S_{yy} son las desviaciones estándar de las variables X y Y .

El valor del índice de correlación varía en el intervalo $[-1, 1]$:

- Si $r = 1$, el índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante.
- Si $0 < r < 1$, existe una correlación positiva.
- Si $r = 0$, no existe relación lineal. Pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.
- Si $-1 < r < 0$, existe una correlación negativa.

Prueba de hipótesis para el coeficiente de correlación de Pearson r

Hipótesis estadística nula $H_0: r = 0$

Hipótesis estadístico alternativo $H_a: r \neq 0$

El propósito de la prueba es evaluar la posibilidad de rechazar la hipótesis nula. El rechazo de H_0 ocurre cuando el valor del coeficiente de correlación de Pearson (r)

supera un valor crítico el cual se encuentra en las tablas de *t – student* ($t_{(\alpha, N-2)}$) con α : nivel de significancia y $N - 2$ grados de libertad, $(t_{(\alpha, N-2)}) = p - value$.

- Si $r > t_{(\alpha, N-2)}$ se rechaza H_0 por lo tanto las variables están relacionadas.
- Si $r < t_{(\alpha, N-2)}$ no es posible rechazar H_0 por lo tanto las variables no están relacionadas.

Prueba τ de Kendall

Debido a que la prueba de correlación de Pearson mide la relación lineal que hay entre 2 variables, es necesario realizar otra prueba que sea capaz de medir otro tipo de relación entre 2 variables. Para lo anterior Una prueba menos sensible a la correlación lineal es el coeficiente de correlación τ de Kendall. Dicho coeficiente de correlación entre dos variables i y j se representa mediante la expresión:

$$\tau_{i,j} = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{i,j} d_i d_j \quad (4.14)$$

Dónde:

$$C_{i,j} = C(1, \dots, 1, F_i(t), 1, \dots, 1, F_j(t), 1, \dots, 1) \quad (4.15)$$

b) Pruebas de normalidad.

La variable dependiente debe estar distribuida normalmente dentro de grupos. En general, la prueba F es robusta a la no normalidad, si la no normalidad es causada por la asimetría o por los valores atípicos. Las pruebas de valores atípicos se deben ejecutar antes del análisis MANOVA y los valores atípicos deben

ser transformados o eliminados. A continuación, se mencionan algunas pruebas para la normalidad multivariada:

Prueba de Marida

Mardia (1970) propuso una prueba multivariada de normalidad, la cual está basada en la extensión multivariada de la asimetría (4.3.1) y la curtosis (4.3.2) las cuales se definen como

$$\beta_{1,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^3 \quad (4.16)$$

$$\beta_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 \quad (4.17)$$

Prueba de Henze-Zirkler

La prueba Henze-Zirkler está basada en una distancia funcional no negativa que mide la distancia entre dos funciones de distribución. El estadístico Henze-Zirkler (HZ) está dado por la ecuación (4.18)

$$HZ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-\frac{\beta^2}{2} D_{ij}} - 2(1 - \beta^2)^{-\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)} D_i} + n(1 + 2\beta^2)^{-\frac{p}{2}} \quad (4.18)$$

Dónde

p : número de variables

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(2p+1)}{4} \right)^{\frac{1}{p+4}} \quad (4.19)$$

$$D_{ij} = (x_i - x_j)' S^{-1} (x_i - x_j) \quad (4.20)$$

$$D_i = (x_i - \bar{x})' S^{-1} (x_i - \bar{x}) = m_{ii} \quad (4.21)$$

Prueba Shapiro-Wilk

Uno de los métodos más utilizados para probar la normalidad en un conjunto de datos es la prueba Shapiro-Wilk. Esta prueba se caracteriza por ser una de las más potentes y sencillas y se utiliza bajo la condición de la cantidad de datos, en este caso deben ser 50 o menos. La prueba se basa en el siguiente estadístico de prueba el cual se define como:

$$W_c = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.22)$$

Este estadístico se compara con un valor de tablas, si el valor calculado es menor que el valor de tablas se dice que los datos siguen una distribución normal multivariada.

c) Prueba de autocorrelación

La autocorrelación es un problema que surge cuando los términos de error del modelo no son independientes entre sí, es decir, $E(e_i e_j) \neq 0$ para todo $i \neq j$. Para comprobar si los términos del error tienen esta característica, se propone la siguiente prueba.

Prueba Durbin-Watson

Una de las pruebas más utilizadas para la detección de autocorrelación, es la prueba Durbin-Watson, para esta prueba se define el siguiente estadístico:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (4.23)$$

La autocorrelación está dada por la determinación del estadístico d , comparándolo con dos límites para llegar a una conclusión. Si $d < d_L$ existe autocorrelación. Si $d > d_U$ no existe autocorrelación. Si $d_L \leq d \leq d_U$ la prueba no es concluyente.

d) Prueba de heterocedasticidad

Existen varias pruebas que permiten encontrar la saber si los en los residuos son heterocedásticos, esto es, que no tienen igual varianza según el nivel de variables independientes. Las pruebas que se tienen para este análisis construyen una regresión auxiliar de los residuos sobre las variables independientes.

Prueba de White

- Se obtienen los residuos del modelo inicial
- Se calcula el coeficiente de determinación de la regresión de los residuos al cuadrado sobre el modelo original más todas las combinaciones multiplicativas de las mismas y sus cuadrados
- El producto de $n \cdot R^2$ se distribuye como una χ_k^2

Si el valor de $n \cdot R^2$ excede el valor crítico rechazamos que los residuos son homocedásticos. El estadístico de White está dado por (4.24)

$$\hat{\Sigma}_W = \frac{N}{N-k} (X'X)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 x_i x_i^T \right) (X'X)^{-1} \quad (4.24)$$

e) Análisis de la varianza multivariado (MANOVA)

Dadas las características del sistema inteligente con el que construimos nuestros modelos no se cuenta con los parámetros del modelo debido a que no se calculan betas en el modelo, por esa razón es necesario construir el análisis en base a la información que se tiene, es decir, en la suma de cuadrados del error y la suma de cuadrados total, las cuales se describen a continuación.

Para la construcción del análisis multivariado de la varianza se utilizaron la suma de cuadrados del error y la suma de cuadrados del total, para así obtener la suma de cuadrados del modelo y construir la tabla MANOVA. Lo anterior se describe en las siguientes ecuaciones.

Para describir la suma de cuadrados de los residuales se tiene

$$E = Y'Y - \hat{Y}Y \quad (4.25)$$

Para describir la suma de cuadrados total se tiene

$$E + H = Y'Y - n\bar{y}\bar{y}' \quad (4.26)$$

De lo anterior podemos construir la tabla MANOVA la cual se describe a continuación y resume las ecuaciones anteriores.

Tabla 4.1 Construcción de la tabla MANOVA

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Λ
Modelo	q	$ H $	$\frac{ E }{ E + H }$
Residual	$n - q - 1$	$ E $	
Total	$n - 1$	$ E + H $	

f) Coeficiente de determinación

Además de construir el MANOVA se propone tener un coeficiente de determinación que permita tener más información del modelo construido, por lo anterior se propuso utilizar una extensión de la R^2 , la cual es una métrica multivariada y su ecuación es la siguiente

$$R_q^2 = (\hat{Y}Y - n\bar{y}\bar{y}') (Y'Y - n\bar{y}\bar{y}')^{-1} \quad (4.27)$$

Para convertir R_q^2 a un escalar se tienen según la literatura dos maneras de obtener ese valor, el primero es por medio de la traza de la matriz formada por R_q^2 dividida entre el número de respuestas (p), dicha ecuación se describe a continuación

$$\frac{tr(R_q^2)}{p} \quad (4.28)$$

El siguiente método es obtener el determinante de dicha matriz, es decir

$$det(R_q^2) \quad (4.29)$$

Con las métricas anteriores se puede obtener más información con una base estadística sólida que nos permita tomar decisiones relacionadas con el modelo construido.

Capítulo 5

Metodología

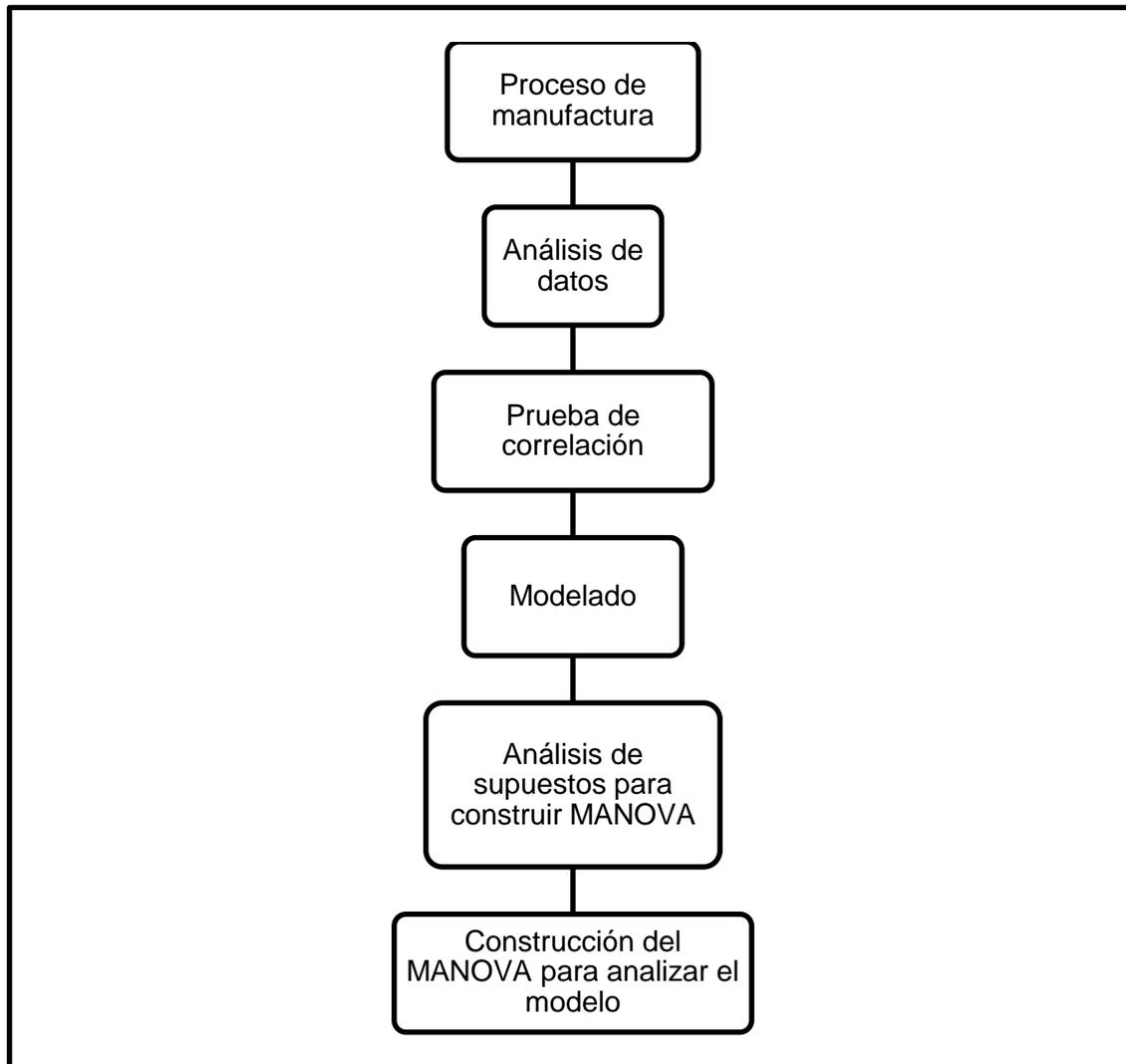


Figura 5.1 Metodología General

Definición del proceso de manufactura

Se buscará un proceso el cual tenga las características necesarias para ser modelado por medio de sistemas difusos, esto es,

- Que sea altamente no lineal
- Que tenga variables las cuales puedan ser modeladas por medio de conjuntos difusos, es decir que dichos conjuntos utilicen variables lingüísticas,
- Que se pueda utilizar la experiencia humana para la construcción de las reglas si-entonces.
- Que este tenga respuestas múltiples.

Cuando se define el proceso de manufactura es necesario contar con un diseño de experimentos que nos permita obtener los datos necesarios para construir el modelo, en el siguiente diagrama se explica esta parte de la metodología.

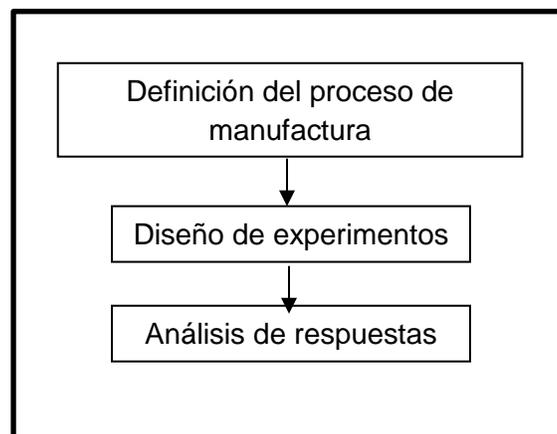


Figura 5.2 Análisis de datos

Después de realizar el diseño de experimentos es necesario analizar si las variables de salida, es decir, las respuestas tienen correlación, para ello utilizaremos el coeficiente de correlación de Pearson descrito en la ecuación

(4.13). Si las respuestas muestran correlación significativa entonces se procede a modelar el proceso de manera multivariada.

Modelado

La siguiente parte en la metodología propuesta es el modelado, esta se llevará a cabo por medio de un sistema de inferencia difuso. El sistema de inferencia difuso dependerá del proceso que se quiera modelar, ya que, cada proceso tiene distintas variables de entrada y de salida, esto hace que cada proceso sistemas de inferencia difuso sea distinto, algunas de sus diferencias estarán en:

- La elección de sus funciones de membresía
- La elección de su mecanismo de inferencia
- La elección del método de defuzzyficación, este también dependerá del mecanismo de inferencia utilizado.

En estas tres características la literatura no propone alguna forma de elegir por ejemplo las funciones de membresía para algún tipo de proceso en específico, es por esto que el modelo está acompañado por un análisis estadístico el cual se describe en la siguiente parte de la metodología.

Análisis de supuestos

Para construir el análisis de la varianza multivariado (MANOVA por sus siglas en inglés) es necesario revisar si los datos cumplen con los supuestos para llevar a cabo dicho análisis. Los supuestos son los siguientes.

i. Normalidad multivariada

Para comprobar este supuesto se usaron tres pruebas las cuales se describieron en el marco teórico. La primera de ellas es la prueba de Mardia descrita en las ecuaciones (4.16) y (4.17), la segunda de ellas es la prueba Henze-Zirkler (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) y la tercera es la prueba Shapiro-Wilk (4.22). Se realizan tres pruebas para que el análisis sea más completo, es decir que si alguna prueba no muestra normalidad es porque es más sensible cierto tipo de datos, además si una de las pruebas muestra normalidad es suficiente para asegurar que los datos se distribuyen normal multivariado.

ii. Autocorrelación

Es importante comprobar que los residuales no están correlacionados entre sí, para detectar esta característica se propone utilizar la prueba Durbin-Watson (4.23).

iii. Heterocedasticidad

Para realizar el análisis multivariado de la varianza es necesario conocer si los residuos no tienen igual varianza según los niveles de variables independientes. En este caso utilizamos la prueba de White (4.24) para analizar dicha característica en los datos.

Construcción del MANOVA para analizar el modelo

Si los datos cumplen con los supuestos entonces se puede realizar el Análisis de la varianza multivariado (MANOVA) descrito en la tabla (4.1) además se puede realizar una prueba dada por el coeficiente de determinación (4.27) para obtener más información del modelo.

Capítulo 6

Experimentación con datos históricos

Una de las ventajas de los sistemas de inferencia difusos es su capacidad de utilizar datos históricos para la construcción de modelos, además de no necesitar una gran cantidad de datos para lograrlo.

El siguiente capítulo muestra 3 modelos construidos por sistemas de inferencia difusos los cuales se utilizaron para comprender la construcción y la forma en que se construyen las reglas y funciones de membresía.

Los procesos que se modelaron tienen las características ya antes planteadas, es decir:

- Tienen variables que se pueden modelar con conjuntos difusos (variables lingüísticas)
- Son multivariados (tienen múltiples entradas y respuestas)
- Son no lineales

En cada modelo se comprobaron algunos de los supuestos planteados en la metodología.

Proceso de maquinado

El maquinado es un término general que describe un grupo de procesos cuyo propósito es la remoción de material y la modificación de las superficies de una pieza de trabajo, después de haber sido producida por diversos métodos. Por ende, el maquinado comprende operaciones secundarias y de acabado.

En la actualidad es uno de los procesos más importantes en la industria ya que por medio de este proceso se elaboran piezas que se utilizan para complementar estructuras ya elaboradas por medio del proceso de fundición entre otras.

El primer caso de estudio que se presenta es un proceso de maquinado el cual tiene características difusas ya que sus variables pueden ser modeladas a través de variables lingüísticas, además de que se puede utilizar la experiencia del operador para construir las reglas del sistema de inferencia difuso y por sus características se comporta de manera no lineal, es por el tipo de salidas que presenta.

Las características mencionadas nos permiten utilizar los sistemas de inferencia difusos para construir un modelo que describa el comportamiento del proceso.

A continuación, se muestra como se desarrolló la metodología para el proceso ya planteado.

Modelado del proceso

Se procede al análisis de los datos históricos, esto es, revisar los datos del diseño de experimentos, de los cuales se construyó la tabla (6.1)

Tabla 6.1 Valores experimentales del proceso de maquinado

Pieza	Velocidad de usillo (RPM)	Velocidad de alimentación (m/min)	D1	D2	H
1	2500	300	7.78	4.18	3.8
2	2750	275	7.88	4.18	4.56
3	3000	250	7.86	4.17	3.82
4	2750	275	7.76	4.05	4.46
5	2750	275	7.82	4.13	4.1
6	2750	239.645	7.72	3.95	4.67
7	2396.45	275	7.85	4.1	3.93
8	2750	310.355	7.44	3.97	3.67
9	2750	275	7.92	4.03	3.78
10	2500	250	7.47	4.07	4.18
11	3103.55	275	7.75	3.99	4.39
12	3000	300	7.47	3.93	4.74
13	2750	275	7.71	4.01	5.59

Para modelar las variables de entrada y de salida se utilizaron las funciones de membresía triangular. En las siguientes tablas se establecen los conjuntos difusos que se definieron para cada variable de entrada y salida.

Tabla 6.2 Conjuntos difusos para la velocidad de husillo

	Velocidad Baja	Velocidad Media	Velocidad Alta
A	2259	2560	2862
B	2500	2802	3104
C	2741	3043	3345

Tabla 6.3 Conjuntos difusos para la velocidad de alimentación

	Velocidad Baja	Velocidad Media	Velocidad Alta
A	211.4	254.3	282.1
B	239.6	275	310.4
C	267.9	298	338.6

Tabla 6.4 Conjuntos difusos para el diámetro 1

	Muy pequeño	Pequeño	Mediano	Grande	Muy Grande
A	7.32	7.42	7.52	7.62	7.718
B	7.42	7.52	7.62	7.72	7.822
C	7.52	7.62	7.72	7.82	7.958

Tabla 6.5 Conjuntos difusos para el diámetro 2

	Muy pequeño	Pequeño	Mediano	Grande	Muy Grande
A	3.5	3.94	4.02	4.1	4.158
B	3.9	3.98	4.06	4.14	4.198
C	3.94	4.02	4.1	4.18	4.238

Tabla 6.6 Conjuntos difusos para la altura

	Muy pequeña	Pequeña	Mediana	Grande	Muy Grande
A	3.4	3.9	4.4	4.9	5.4
B	3.65	4.15	4.65	5.15	5.65
C	3.9	4.4	4.9	5.4	5.9

Además de establecer los conjuntos difusos para cada una de las variables, es importante analizar la relación que existe entre cada una de ellas, es decir, hacer una conexión entre las variables de entrada con las variables de salida. Esta parte se realiza mediante la construcción de reglas las cuales provienen del conocimiento experto de quien trabaja con dicho proceso. Para construir el modelo de este proceso se utilizaron 10 reglas difusas, de las cuales se muestran algunas a continuación.

- R1: Si la velocidad de husillo es media y la velocidad de alimentación es media Entonces el diámetro 1 es muy grande, el diámetro 2 es mediano, la altura es mediana.
- R2: Si la velocidad de husillo es media y la velocidad de alimentación es alta Entonces el diámetro 1 es muy pequeño, el diámetro 2 es pequeño, la altura es muy pequeña.

Todas las reglas anexo (A1)

Otras características que permiten la construcción del sistema de inferencia difuso para el modelado de este proceso son los siguientes.

- Método AND: Mínimo
- Método de implicación: Mínimo
- Método de defuzzificación: Centroide
- Mecanismo de inferencia: Mamdani

Inferencia difusa

Utilizando el sistema difuso mencionado anteriormente se procedió a realizar la inferencia difusa, y obtener así la predicción.

El modelo construido por medio del sistema de inferencia difuso se comparó con los datos experimentales, dicha comparación se muestra en las figuras (6.1), (6.2), (6.3).

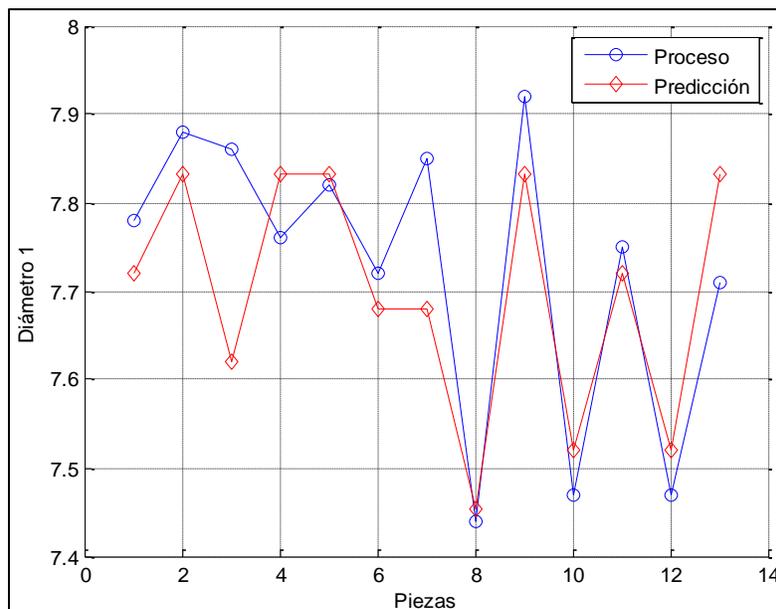


Figura 6.1 Comparación de respuestas (Diámetro 1)

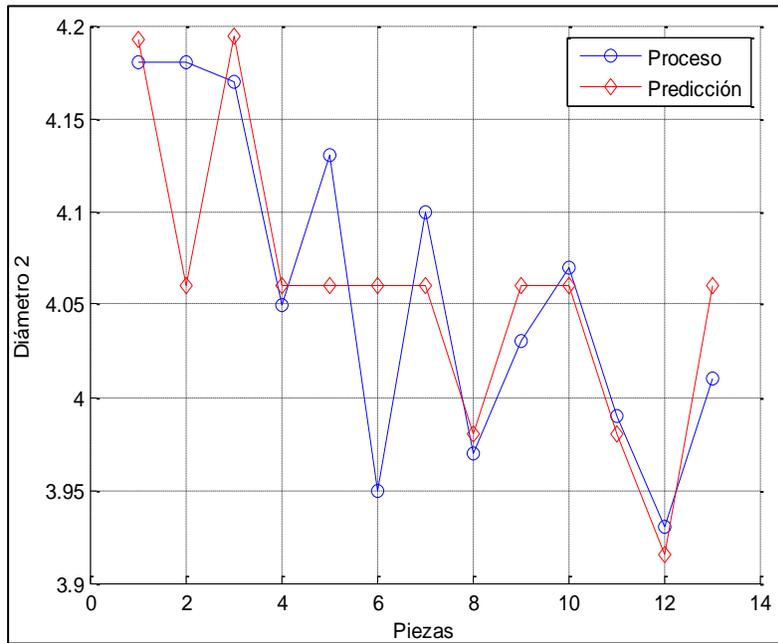


Figura 6.2 Comparación de respuestas (Diámetro 2)

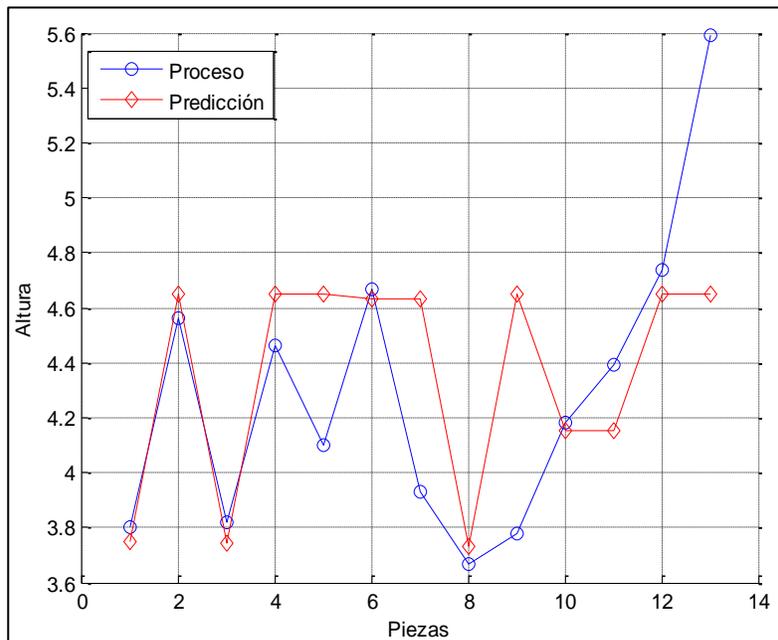


Figura 6.3 Comparación de respuestas (Altura)

Análisis de respuestas

Al obtenerse la predicción, es decir las respuestas predichas del modelo construido por medio del sistema de inferencia difuso, se realizó el análisis planteado en la metodología. Las pruebas estadísticas son las siguientes:

Prueba de correlación de Pearson

Tabla 6.7 Análisis de correlación

Salidas	y_1	y_2
y_2	0.6758 ¹	-
	0.0112 ²	-
y_3	0.1557 ¹	0.4088 ¹
	0.6116 ²	0.1655 ²
1.- Coeficiente de correlación de Pearson		
2.- Valor P		

En la tabla (6.7) se muestra que las variables y_1 e y_2 están correlacionadas, ya que el coeficiente de correlación de Pearson es 0.6758 y el P-valor es menor que 0.05. Esto dio para publicarse en el WIEM 2015 (Cerde et. Al 2015)^a

Pruebas de normalidad

Tabla 6.8 Valores para pruebas de normalidad

	Henze-Zirkler	Mardia	Shapiro-Wilk
Estadístico de prueba	0.59	0.68	0.944
Valor P asociado a la prueba estadística	0.28	0.05	0.866

La tabla (6.8) nos muestra por medio de la prueba Henze-Zirkler que los datos muestran normalidad multivariada ya que el valor P es mayor al nivel de significancia que es 0.05. La prueba de Shapiro-Wilk también indica normalidad multivariada ya que el estadístico de prueba es mayor al valor P.

Prueba de autocorrelación

Tabla 6.9 Valores de la prueba Durbin-Watson

d_1	1.86
d_2	2.87
d_3	1.48
d_u	1.25

La tabla (6.9) nos muestra que los datos no tienen autocorrelación ya que los valores $d_1, d_2, d_3 > d_u$, por lo tanto, se cumple el supuesto de la inexistencia de autocorrelación.

Prueba de homogeneidad

Tabla 6.10 Valores de la prueba de White

w_1	19.5
w_2	18.63
w_3	19.22
χ^2	21.26

Para la prueba de homogeneidad en las varianzas la tabla 6.10 nos muestra que los residuales cumplen con esa característica ya que los valores de w_1, w_2 y w_3 son menores que un valor chi-cuadrada de tablas.

Pruebas de supuestos para MANOVA

Los resultados anteriores nos muestran que, si se desea realizar inferencia estadística en el modelo, esto es, identificar si el modelo representa la variabilidad

del proceso o cuales son las variables de mayor influencia en él es necesario realizar un análisis multivariado, para ello se necesitan cumplir los supuestos de normalidad, heterocedasticidad y autocorrelación.

Proceso de colada

El segundo caso de estudio que se presenta es de un proceso de colada el cual tiene como característica el vaciado de metal fundido en un molde permanente el cual tienen un movimiento (basculamiento) para que el metal se distribuya a lo largo de todo el molde y así se forme la pieza. Esta pieza es utilizada para estaciones eléctricas y es conocido como tanque muerto.

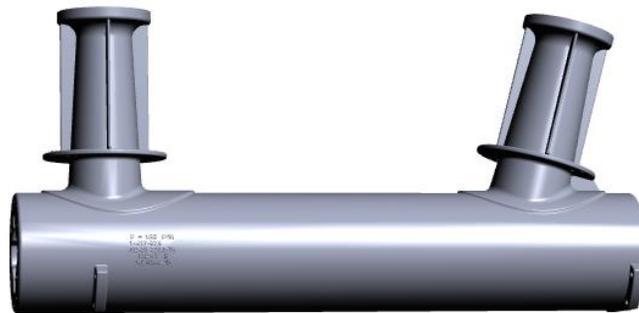


Figura 6.4 Tanque muerto para estación eléctrica

Modelado del proceso.

Para la construcción del sistema de inferencia difuso se revisaron los datos históricos y se trabajó con un diseño de experimentos el cual se describe en la tabla (6.11)

Tabla 6.11 Niveles para las variables del proceso de colada

Temperatura Metal	Temperatura del Molde	Basculamiento
760	390	20
760	390	35
760	440	35
760	440	20
790	390	20
790	390	35
790	440	35
790	440	20

Para la construcción del sistema de inferencia difuso del proceso anterior se siguieron dos recomendaciones. Una de ellas era construir el sistema difuso para el proceso de manera multivariada, esto es, tomando en cuenta todas las características de calidad que se plantean a continuación:

- Conteo de poros visibles
- Conteo de rechupes
- Falta de material
- Conteo de marcas por flujo de metal líquido
- Mal llenado

Dadas las características anteriores se contó con un diseño de experimentos el cual contenía la información necesaria para construir el sistema de inferencia difuso para ambas recomendaciones.

Para ver las reglas del sistema de inferencia difuso ver anexo (A2)

Tabla 6.12 Defectos en el proceso de vaciado

Conteo de poros visibles	Conteo Rechupes	Falta de material	Mal llenado	Conteo de marcas por flujo de metal liquido
20	4	0	0	0
61	4	0	3	0
25	0	1	0	0
20	10	0	0	1
0	3	0	15	1
51	22	1	2	0
22	3	1	29	0
0	6	96	28	2

Siguiendo con las recomendaciones de la empresa se procedió a construir el sistema de inferencia difuso para una sola respuesta, esto es, para la suma de los defectos encontrados.

Las variables de entrada se modelaron por medio de funciones de membresía triangular y cada una con 3 niveles.

A continuación, se presenta un ejemplo de la una de las variables de entrada

Tabla 6.13 Parámetros para la variable de entrada temperatura del metal

	Niveles		
	Bajo	Medio	Alto
A	748	763	778
B	760	775	790
C	772	787	802

Y para modelar la respuesta se utilizó la función de membresía triangular la cual se define por medio de 3 parámetros.

Tabla 6.14 Parámetros para los conjuntos difusos de la variable poros visibles

	POCOS	ALGUNOS	MUCHOS
A	-24.4	6.1	36.6
B	0	30.5	61
C	24.4	54.9	85.4

Además de las variables de entrada, sus funciones de membresía y parámetros a se presentan las características del sistema de inferencia difuso para el modelado de dicho proceso.

- Reglas: 7
- Método AND: Mínimo
- Método de implicación: Máximo
- Método de defuzzificación: Centroide
- Mecanismo de inferencia: Mamdani

Inferencia difusa

El modelo construido por medio del sistema de inferencia se comparó con los datos experimentales, el resultado de la inferencia difusa se presenta en la siguiente tabla, donde se compara la respuesta real vs la predicción, la comparación se muestra en las figuras (6.5), (6.6), (6.7), (6.8) y (6.9).

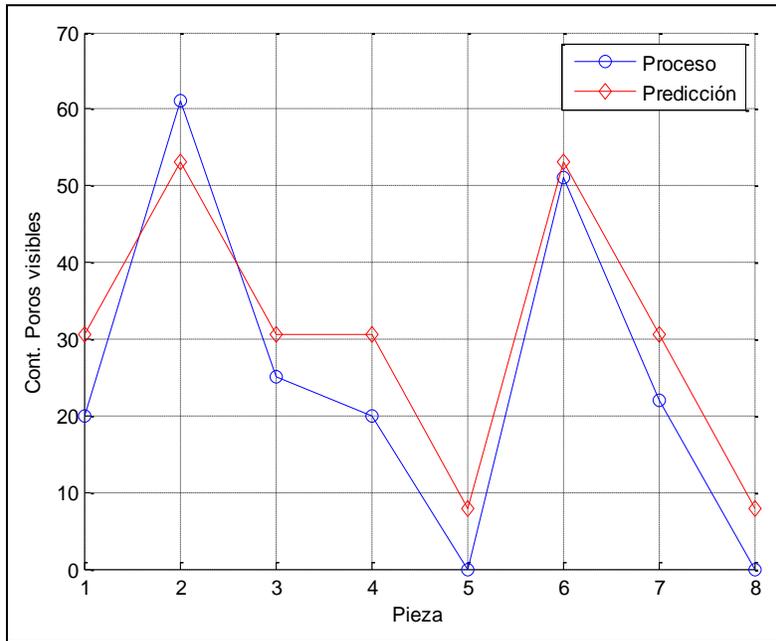


Figura 6.5 Comparación de respuestas (Conteo de poros visibles)

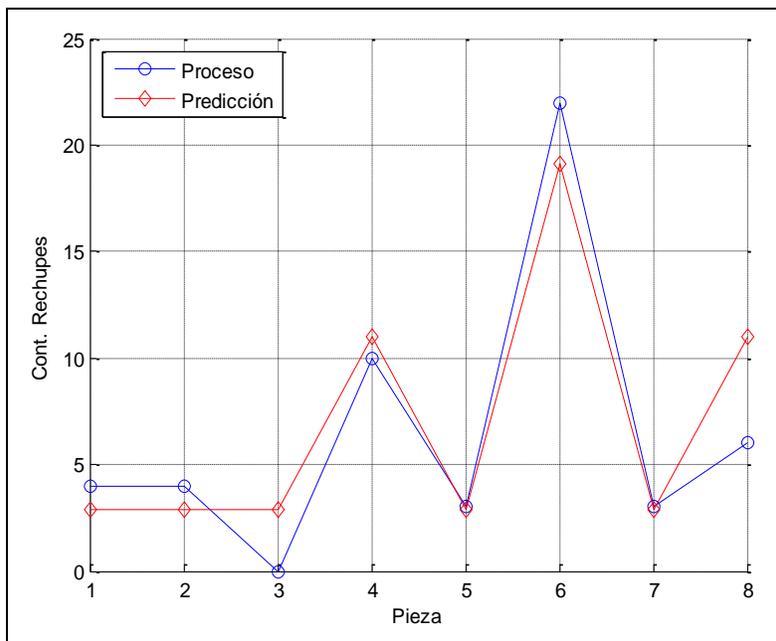


Fig. 6.6 Comparación de respuestas (Conteo de rechupes)

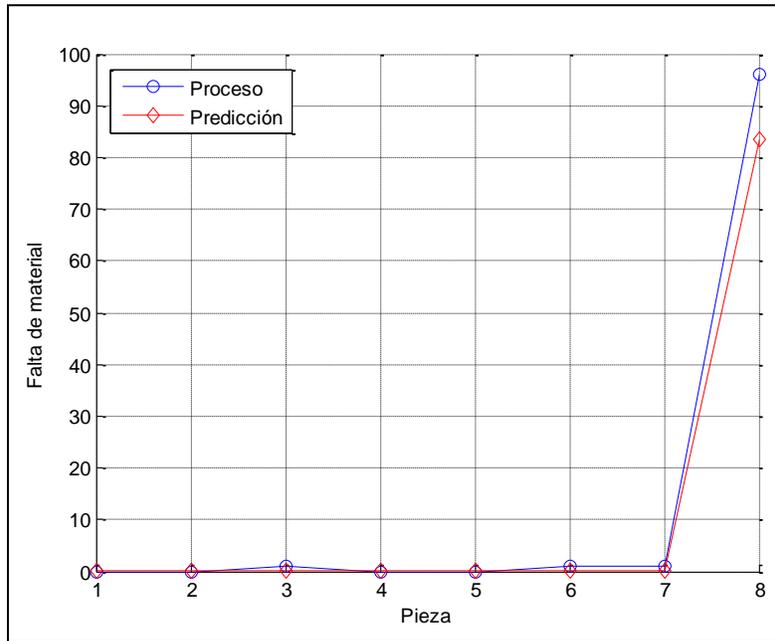


Figura 6.7 Comparación de las respuestas (Falta de material)

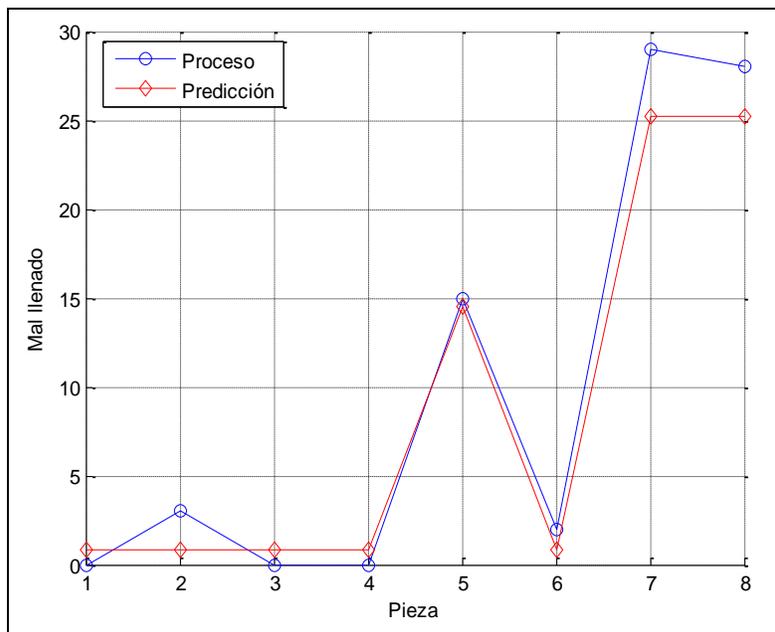


Figura 6.8 Comparación de respuestas (Mal llenado)

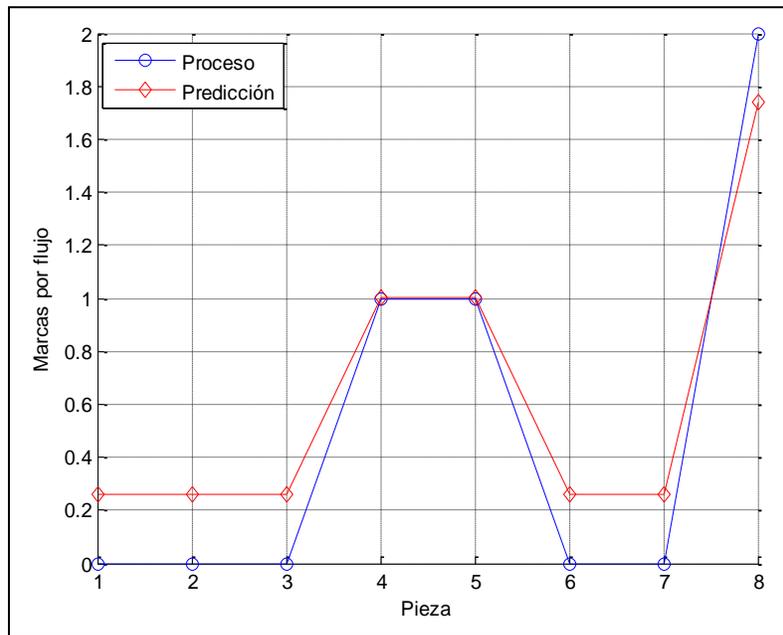


Figura 6.9 Comparación de respuestas (Conteo de marcas por flujo de metal liquido)

Análisis de respuestas

Siguiendo la metodología ya planteada se procedió a realizar las pruebas de correlación, normalidad, homosedasticidad y aurocorrelación.

Prueba de correlación de Pearson

Tabla 6.15 Análisis de correlación

Salidas	y_1	y_2	y_3	y_4
y_2	0.401 ¹	-	-	-
	0.325 ²	-	-	-
y_3	-0.462 ¹	-0.026 ¹	-	-
	0.249 ²	0.951 ²	-	-
y_4	0.517 ¹	-0.237 ¹	0.59 ¹	-
	0.189 ²	0.582 ²	0.124 ²	-
y_5	-0.694 ¹	0.027 ¹	0.797 ¹	0.485 ¹
	0.056 ²	0.949 ²	0.018 ²	0.223 ²
1.- Coeficiente de correlación de Perason				
2.- Valor P				

La tabla (6.15) nos muestra que existe una correlación significativa entre las variables y_1, y_5 y entre y_3, y_5 ya que su valor P es menor a 0.05. Debido a que existe correlación entre 3 variables es necesario que el modelo y el análisis de los datos sea de manera multivariada. Estos resultados se publicaron en Cerda et. al. 2016^b.

Pruebas de normalidad

Tabla 6.16 Valores para las pruebas de normalidad

	Henze-Zirkler	Mardia	Shapiro-Wilk
Estadístico de prueba	$T_B = 1.1342$	0.01	$W_M = 0.905$
Valor P asociado al estadístico de prueba	0.0004	0.05	0.897

La tabla (6.16) de las pruebas de normalidad indica que por medio la prueba Henze-Zirkler indica que no los datos no son normales multivariados, por lo tanto se procede a verificar otra de las pruebas. La prueba Shapiro-Wilk los datos muestran normalidad multivariada ya que el valor del estadístico de prueba es mayor al valor P. Como se mencionó en la metodología se necesita que al menos una prueba muestra normalidad multivariada en los datos para decir que los datos se distribuyen normales multivariados.

Prueba de autocorrelación

Tabla 6.17 Valores de la prueba Durbin-Watson

d_1	1.21
d_2	1.37
d_3	0.88
d_4	0.647
d_5	1.84
d_u	0.53

Los valores obtenidos en la tabla (6.17) indican que no hay autocorrelación en los residuales ya que todos los valores desde d_1 hasta d_5 son mayores que d_u por lo tanto concluimos que los datos no presentan dicha característica.

Prueba de homogeneidad

Tabla 6.18 Valores de la prueba de White

w_1	20.33
w_2	19.74
w_3	23.89
w_4	21.43
w_5	19.05
χ^2	24.8

La prueba de homogeneidad de las varianzas de White que se muestra en la tabla 6.18 indica que todos los valores del estadístico de prueba son menores que un valor χ^2 de tablas el cual es $\chi^2 = 24.8$, por lo que se concluye que los residuos cumplen con el supuesto de homocedasticidad.

Manufactura de corazones

Esta experimentación consistió en construir un modelo para el proceso de fabricación de corazones para piezas complejas de aluminio, en el cual se analizará la flexión y la tracción de la pieza con respecto al porcentaje de resina, la cantidad de compuesto de resina y las horas del curado de la pieza.

Los datos con los cuales se construyó el modelo se tomaron de la tabla (6.19).

Tabla 6.19 Datos experimentales del proceso

% Resina	Compuesto de Resina	Horas De curado	Flexión	Tracción
1.25	50	24	36	5.8586788
1.25	60	24	39	5.97609
1.25	50	1	25	7.0307
1.5	50	1	39	7.94469
1.25	60	1	37	9.1399
1.5	60	1	42	9.49144
1.5	50	24	41	11.8116
1.5	60	24	56	12.5146

Modelado del proceso

Para construir el sistema difuso se utilizaron funciones de membresía triangulares para cada una de las variables de entrada, a continuación, las tablas muestran los parámetros y niveles de cada uno de ellas.

Tabla 6.20 Valores y niveles para de la variable de entrada % Resina

	Niveles		
	Bajo	Medio	Alto
A	1.15	1.275	1.4
B	1.25	1.375	1.5
C	1.35	1.475	1.6

Además de las variables de entrada, sus funciones de membresía y sus parámetros a continuación se presentan las características del sistema de inferencia difuso que para el modelado de dicho proceso.

- Variables de entrada: 3
- Variables de salida: 1
- Reglas: 7
- Método AND: Mínimo
- Método de implicación: Mínimo
- Método de defuzzificación: Centroide
- Mecanismo de inferencia: Mamdani

Se utilizaron diferentes funciones de membresía para analizar mediante la métrica R_q^2 si el cambio en las funciones de membresía se reflejaba en dicha métrica. (Cerde et. al. 2016)^c

Inferencia difusa

El modelo construido por medio del sistema de inferencia se comparó con los datos experimentales, el resultado de la inferencia se comparó con la respuesta del proceso. La comparación se muestra en las figuras (6.4) y (6.5)

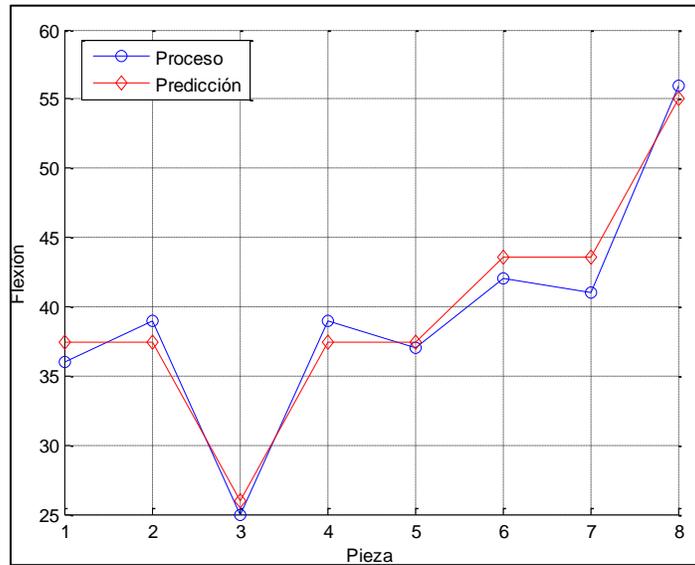


Figura 6.4 Comparación de las respuestas (Flexión)

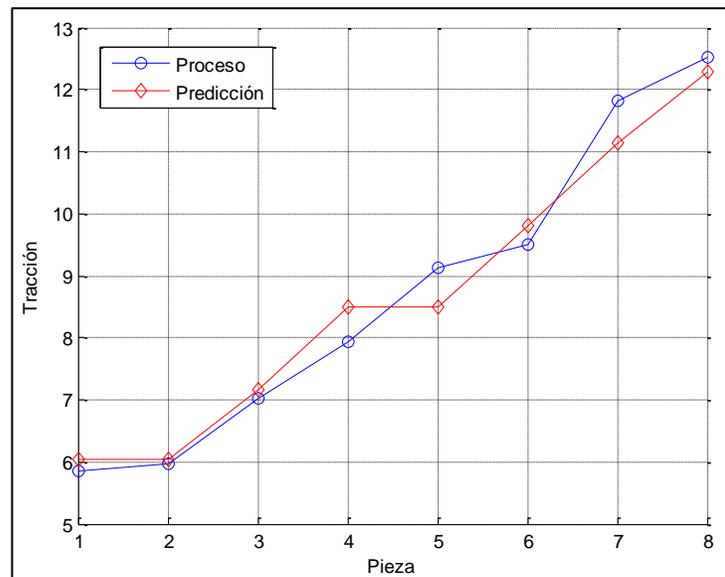


Figura 6.4 Comparación de respuestas (Flexión)

Análisis de respuestas

Al obtenerse la predicción, es decir las respuestas del modelo construido por medio del sistema de inferencia difuso se prosiguió a realizar la prueba de correlación entre cada una de ellas, para lo anterior se llevó a cabo la prueba de correlación de Pearson de la cual se obtuvieron los siguientes resultados.

Prueba de correlación de Pearson

Tabla 6.21 Análisis de correlación

Salidas	y_1
y_2	0.698
	0.054
1.- Coeficiente de correlación de Pearson	
2.- Valor P	

En la tabla (6.21) nos indica que debido a que el valor P es .05 y el coeficiente de correlación es .698 podemos decir que las respuestas están correlacionadas, por lo que hay que verificar ahora si estas cumplen con los supuestos para construir el análisis multivariado.

Pruebas de normalidad

Tabla 6.26 Valores para las pruebas de normalidad

	Henze-Zirkler	Mardia	Shapiro-Wilk
Estadístico de prueba	$T_B = 1.1342$	0.01	$W_M = 0.905$
Valor P asociado al estadístico de prueba	0.0004	0.05	0.897

La tabla 6.26 muestra por medio de la prueba Shapiro-Wilk que los datos se distribuyen normal multivariados ya que su estadístico de prueba es mayor que el valor P asociado a la prueba.

Prueba de autocorrelación

Tabla 6.27 Valores de la prueba Durbin-Watson

d_1	1.64
d_2	1.82
d_u	1.32

La tabla (6.27) nos indica que los residuales no muestran autocorrelación debido a que los valores d_1 y d_2 son mayores que d_u .

Prueba de homogeneidad

Tabla 6.28 Valores de la prueba de White

w_1	21.54
w_2	23.61
χ^2	27.8

La prueba de homogeneidad de las varianzas de White en la tabla 6.28 mostró que los estadísticos de prueba son menores a un valor χ^2 de tablas el cual es $\chi^2 = 27.8$, por lo que se concluye que los residuos cumplen con el supuesto de homocedasticidad.

Capítulo 7

Aplicación

Proceso de colada para la elaboración de contrapesos

La aplicación se realizó en un proceso de colada, el cual tiene como finalidad el colocar un contrapeso para cabeceras de asientos de automóviles, los cuales se muestran en la figura (7.1).



Fig. 7.1 Contrapesos para cabeceras

Siguiendo la metodología establecida se procedió a realizar una estancia en la fundidora Aluminios y Bronces de Saltillo (ALBRONSA S.A de C.V).

Modelado del proceso

En esta primera parte se procedió a revisar y analizar las características del proceso, esto es:

- Variables de entrada
- Variables de salida (características de calidad)
- Tipo de proceso (colada en molde permanente)
- Desarrollo del proceso (seguimiento paso a paso del mismo)

Después de realizar dichas observaciones se procedió a construir el diseño de experimentos, este se obtuvo a partir de un diseño central compuesto con 6 puntos centrales y 6 puntos axiales definidos por un $\alpha = 1.682$, esto al tomar como variables de entrada la temperatura del metal, la temperatura del molde y el basculamiento, a continuación, se muestra la tabla con los valores obtenidos en la aplicación del diseño de experimentos.

Tabla 7.1 Datos experimentales del proceso de colada

Variables de entrada			Variables de salida			
Temperatura del Metal	Temperatura del Molde	Basculamiento	Peso	SCP2	SPC3	Rechupe
390	210	18	0.922	-0.03	-1.2	0.2032
415	250	18	0.929	-0.08	-10.05	0.4699
390	210	30	0.924	-0.03	-0.21	0.11
415	210	30	0.923	-0.65	-0.59	0.17
390	250	30	0.925	-0.24	0.17	0.09
415	250	30	0.918	0.76	-0.47	0.08
402.5	230	24	0.926	-0.7	-0.44	0.15
402.5	230	24	0.928	-0.93	0.27	0.07
402.5	230	24	0.928	-0.5	0.01	0.07
402.5	230	24	0.928	-1.1	0.2	0.02
382.0875	230	24	0.925	0.36	0.09	0.1
422.9125	230	24	0.926	-0.65	0.12	0.08
402.5	197.34	24	0.925	-0.15	-1.17	0.37
402.5	262.66	24	0.923	0.87	-1.02	0.08
402.5	230	14.202	0.925	-1.05	-0.58	0.22
402.5	230	33.798	0.924	-0.97	-0.66	0.13
402.5	230	24	0.929	-0.16	-0.32	0.02
402.5	230	24	0.927	-0.86	-0.59	0.03

Dadas las características del proceso se procede a construir el sistema de inferencia difuso para obtener el modelo del proceso tiene las siguientes características:

- Variables de entrada: 3
- Variables de salida: 4
- Reglas: 13
- Método AND: Mínimo
- Método de implicación: Máximo
- Método de defuzzificación: Centroide
- Mecanismo de inferencia: Mamdani

En la tabla (7.2) se muestra un ejemplo de los valores y niveles de la función de membresía que se utilizó para modelar la temperatura del metal.

Tabla 7.2 Valores y niveles para la temperatura del metal

	Niveles		
	Bajo	Medio	Alto
A	365.8	386.2	406.6
B	382.1	402.5	422.9
C	398.4	418.8	439.2

Para ver todas las reglas revisar anexo A(3)

Inferencia difusa

Al realizar la inferencia del sistema difuso se obtuvo una predicción para cada una de las respuestas. Cada respuesta del proceso fue comparada con la predicción las comparaciones se muestran en las figuras (7.2), (7.3), (7.4), (7.5).

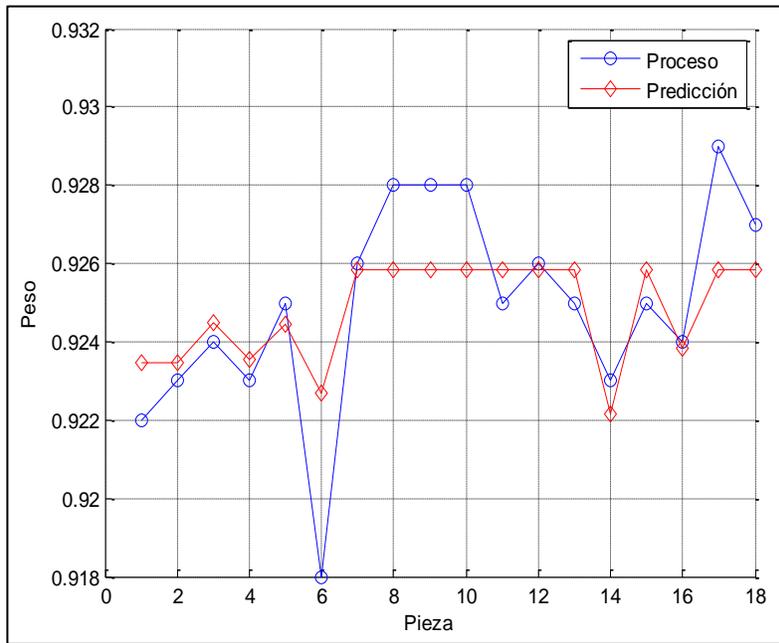


Figura 7.2 Comparación de respuestas proceso vs predicción (Peso)

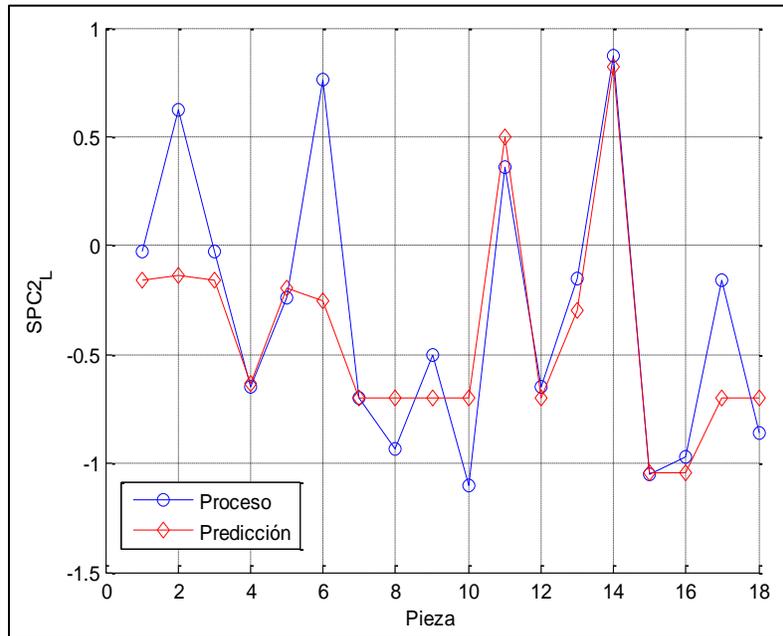


Figura 7.3 Comparación de respuestas proceso vs predicción (SPC2)

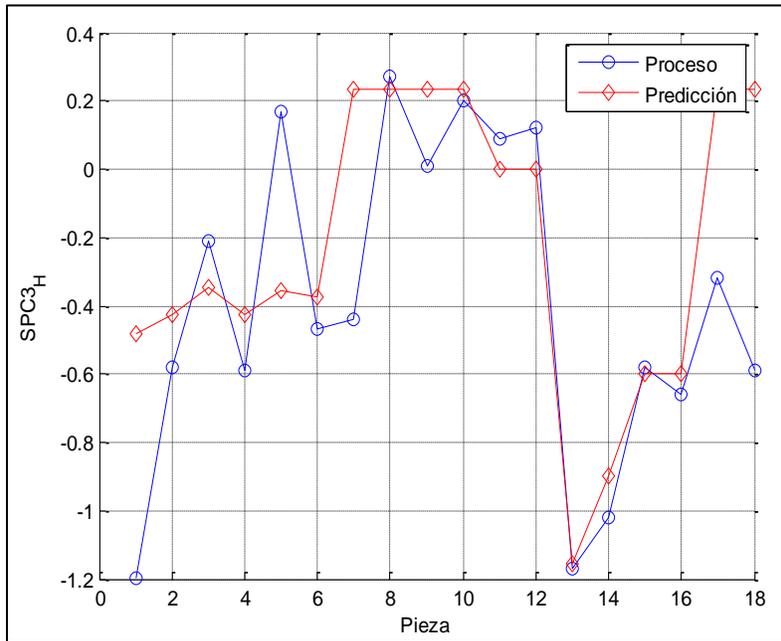


Figura 7.4 Comparación de respuestas proceso vs predicción (SPC2)

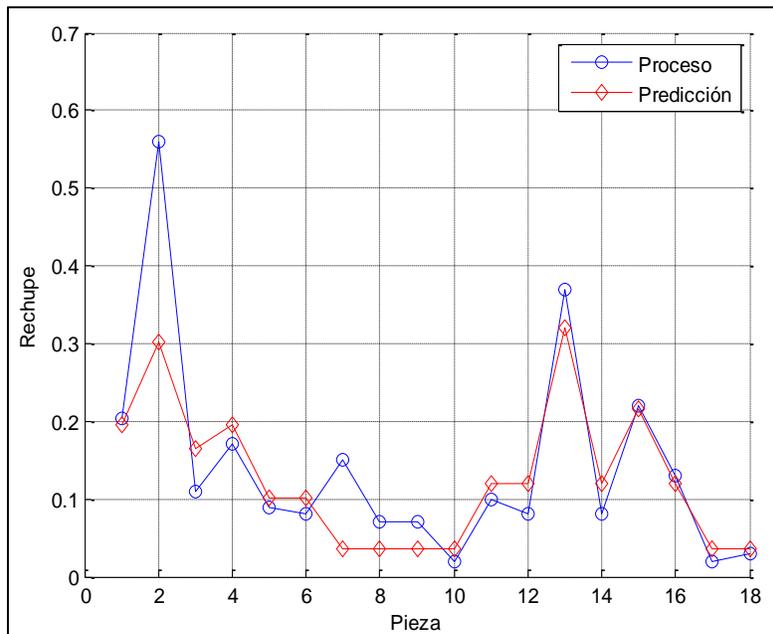


Figura 7.5 Comparación de respuestas proceso vs predicción (Rechupe)

Para este caso se utilizó la traza y el determinante de la matriz formada por R_q^2 para verificar si había diferencia entre ambos resultados. (Cerde et. al. 2016) ^d

Análisis de las respuestas

Al obtener la predicción de cada una de las respuestas por medio del modelo, es necesario realizar una prueba de correlación, de esta manera procederemos a realizar el análisis correspondiente, ya sea univariado (ANOVA) o multivariado (MANOVA). En la siguiente tabla se muestran los resultados de la prueba de correlación de Pearson.

Tabla 7.3 Valores de la prueba de correlación de Pearson

	y_1	y_2	y_3
y_2	-0.488 ¹	-	-
	0.04 ²	-	-
y_3	0.566 ¹	-0.357 ¹	-
	0.014 ²	0.146 ²	-
y_4	-0.316 ¹	0.219 ¹	-0.792 ¹
	0.201 ²	0.383 ²	0.000 ²
1.- Coeficiente de correlación de Pearson			
2.- Valor P			

El análisis de las respuestas nos indica que existe correlación significativa entre las variables y_1 y y_3 , y_3 y y_4 , además de que las variables y_1 y y_2 también presentan correlación.

Debido a la condición anterior es importante ahora verificar cada uno de los supuestos para así realizar el análisis multivariado, a continuación presentamos los resultados de cada una de las pruebas, cada una de ellas se realizaron con los residuales, esto es, la diferencia entre los datos del proceso y la predicción obtenida por el modelo $e_i = y - \hat{y}$.

Pruebas de normalidad

Tabla 7.4 Valores para las pruebas de normalidad

	Henze-Zirkler	Mardia	Shapiro-Wilk
Estadístico de prueba	$T_B = 1.1342$	0.01	$W_M = 0.905$
Valor P asociado al estadístico de prueba	0.0004	0.05	0.897

Los residuos mostraron para la prueba de normalidad de Mardia y Henze-Zirkler que se distribuyen de manera normal multivariada

Prueba de homogeneidad de varianzas

Tabla 7.5 Valores de la prueba de White

w_1	13.58
w_2	9.48
w_3	9.94
w_4	12.67
χ^2	27.6

La prueba de homogeneidad de las varianzas de White mostró que el estadístico es menor a un valor χ^2 de tablas el cual es $\chi^2 = 27.6$, por lo que se concluye que los residuos cumplen con el supuesto de homocedasticidad.

Prueba de autocorrelación

Tabla 7.6 Valores de la prueba Durbin-Watson

d_1	1.84
d_2	1.85
d_3	1.91
d_4	2.24
d_u	1.82

Para la prueba de linealidad se obtuvieron los valores de la prueba Durbin Watson, para cada residual, obteniendo que todos los valores fueron mayores a un $d_U = 1.82$, por lo que, dada la prueba, aseguramos que el supuesto de linealidad se cumple para los residuos.

Análisis multivariado de la varianza (MANOVA)

Ya que los residuales cumplieron cada uno de los supuestos es posible ahora construir el MANOVA, el cual se describe en la siguiente tabla.

Tabla 7.7 Tabla MANOVA

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cociente	VC
Modelo	3	-0.00003	0.046748	0.194
Residual	14	-0.000015		
Total	17	0.00032		

La tabla (7.7) que muestra el Análisis multivariado de la varianza nos permite identificar por el valor del cociente y debido a que este es menor que el valor crítico que el modelo describe que la variabilidad del proceso

Capítulo 8

Conclusiones

Hoy en día la industria de la manufactura busca analizar y saber el comportamiento de cada uno de sus procesos, esto, para la toma de decisiones en cada uno de ellos. La toma de decisiones es afectada cuando los datos no siempre cumplen con supuestos para su análisis, y en otros casos los procesos tienen un comportamiento no lineal en sus variables de salida, lo que hace que el conocer el comportamiento de dicho proceso se aún más difícil.

Los sistemas de inferencia difusos nos permiten construir un modelo que utiliza la información que se conoce del proceso para conocer la relación entre cada una de las variables y saber su comportamiento, sin embargo, en la literatura dichos modelos hacen el análisis de manera univariada sin hacer alguna prueba que fundamente dicha decisión.

Debido a estas dificultades y a las ventajas que los sistemas de inferencia difusos presentan ante estos tipos de procesos se investigó y se desarrolló este trabajo donde se presentan varios procesos los cuales se modelaron por medio de sistemas de inferencia difusos. Además, se utilizaron métricas estadísticas para verificar supuestos y así construir el MANOVA (por sus siglas en inglés).

Lo anterior como una metodología general propuesta para el modelado y análisis de proceso propiciando así que sean más robustos.

Para cumplir con el **objetivo general y el objetivo específico uno** en esta investigación se modelaron 4 procesos por medio de distintos sistemas de inferencia difusos, todos los procesos tenían como característica múltiples respuestas, además en cada uno de ellos se realizó el análisis estadístico correspondiente, es decir, se realizaron pruebas de correlación, normalidad multivariada, homogeneidad de las varianzas y autocorrelación, además de realizar el MANOVA, además cada modelo fue evaluado mediante la métrica R_q^2 para conocer la eficiencia de cada modelo. Lo anterior permitió contestar las preguntas de investigación 2.-¿Qué métricas estadísticas se utilizan para medir la eficiencia de un modelo construido por medio de un sistema de inferencia difuso? 3.-¿Cómo se aplican dichas métricas? y 4.-¿Cómo se aplica un análisis multivariado a un sistema de inferencia difuso?

Todos los procesos han sido modelados y analizados siguiendo la metodología propuesta cumpliendo así el **objetivo específico dos**, en cada uno de ellos se analizaron sus respectivas respuestas y en todos los casos dichas respuestas estaban correlacionadas.

El análisis propuesto en esta metodología permitió hacer una inferencia más acertada en los modelos por lo cual se cumple la (H_2), ya que en particular y como se plantea en el estado del arte en este tipo de modelos no se realizaba un análisis multivariado de la varianza.

Lo anterior nos permitió continuar con la revisión de los supuestos para cada modelo lo cual cumple con el **objetivo específico 3** y en particular con el proceso de la aplicación se procedió a realizar el análisis multivariado de la varianza, el cual nos permitió hacer inferencia acerca del modelo construido, que en este caso nos mostró que el modelo representaba la variabilidad del proceso. Para encontrar la variable de mayor influencia se necesitan realizar otras consideraciones las cuales se plantean como trabajo futuro.

Como consecuencia del objetivo general y de la pregunta de investigación (4) se encontró en la literatura que otra forma de construir modelos por medio de sistemas de inferencia difusos es a través de mínimos cuadrados difusos, la revisión de la metodología nos permite continuar con la investigación, ya que con este método se encuentran los parámetros para cada regla del sistema de inferencia difuso lo que nos indica que puede ser posible realizar un análisis estadístico más profundo ya que los parámetros nos podrían indicar que funciones de membresía, reglas, variables, etc., son más importantes mediante pruebas de hipótesis, lo cual nos deja una línea abierta para trabajo futuro.

Lo anterior también nos permitirá realizar un análisis sobre los métodos de defuzzyficación y como estos afectan en los sistemas de inferencia, lo cual es trabajo futuro al ser consecuencia de las características anteriores.

Bibliografía

Barzani M. (2015) *Fuzzy logica based model for predicting surface roughness of machined Al-Si-Cu-Fe die casting alloy using different aditives turning*

Cataldi Zulma (2006). *Tecnologías Inteligentes para predicción de la aptitud del alumno.*

Cerda I. et. al. (2015) *Multi-output Fuzzy Logic System in a machining process.*^a

Cerda I. et. al. (2016) *Two-output Fuzzy Logic System in the manufacturing of pieces to casting process.*^b

Cerda I. et. al. (2016) *Multivariate Fuzzy Inference System to modeling a casting process.*^c

Cerda I. et. al. (2016) *Statistics Metrics on a Fuzzy Inference System. Case Study: Modelling a Tilt Pour Casting Process.*^d

Dapoigny R, (2007). *Formal Goal Generation for Intelligente Control Systems.*

Dieter, G. (1988). *Mechanical Metallurgy*, Third edition. Mc Graw Hill.

Ganjigattia J., (2008). *Forward and reverse modeling in MIG welding process using fuzzy logic-based approaches.*

Guanrong C., (2001). *Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy control systems.*

Henze, N., Zirkler, B. (1990). *A class of invariant consistent test for multivariate normality.* Communications in statistics – Theory and methods 19.

Jaya A. (2014) *Modeling of tin coating roughness using fuzzy logic approach*

Kovac P, (2014). *Multi-output fuzzy inference system for modeling cutting temperature and tool life in face milling.*

- Kumar A., Pandey A. (2011). *Taguchi based fuzzy logic optimization of multiple quality characteristics in laser cutting of Duralumin sheet.*
- Kumar S. (2014). *Optimization of Multi-Objective Response during CNC Turning using Taguchi-Fuzzy Application.*
- Lata B. (2010) *Modeling and Analysis of Surface Roughness Parameters in Drilling GFRP Composites Using Fuzzy Logic*
- Lee, K. (2005). *First Course on Fuzzy Theory and Applications.*
- Maguiña R. (2010) *Sistemas de inferencia basados en Lógica Borrosa: Fundamentos y caso de estudio.*
- Mardia, K. (1970). *Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications.* Biometrika 57.
- Mardia, K. (1980). *Tests of univariate and multivariate normality.* Handbook of statistics 1, North-Holland Company, Amsterdam.
- Mecklin, C., Mundfrom, D. (2004). *An appraisal and bibliography of tests for multivariate normality.* International Statistical Review 72.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vinning, G. G. (2006). *Introducción al análisis de Regresión Lineal.* Continental.
- Montgomery, D. C. (2006). *Diseño y análisis de experimentos.* Limusa.
- Milton J., (2004). *Probabilidad y estadística con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales.*
- Pedrycz W. (2003) *Evolutionary Fuzzy Modeling*
- Provotar A. (2013) *Fuzzy inference systems and their applications*
- Ramanujam R., (2014) *Influence of cutting parameters on machinability of inconel 718 alloy with coated carbide insert-a taguchi based fuzzy logic approach*

- Razali S., (2015). *Fuzzy logic modeling for peripheral end milling process*.
- Rencher, A. (2002). *Methods of multivariate analysis*. Wiley-Interscience.
- Roland E. Walpole, R. H. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México
- Romeu, J., Ozturk, A. (1993). *A comparative study of goodness-of-fit tests for multivariate normality*. Journal of Multivariate Analysis 46.
- Ross, T. J. (2004). *Fuzzy logic with engineering applications*.
- Sharma S., (2014). *Fuzzy logic modeling and multiple performance optimization in turning GFRP composites using desirability function analysis*.
- Sharma V, (2011). *Multi response optimization of process parameters based on Taguchi Fuzzy model for coal cutting by water jet technology*.
- Sengottuvel P., (2013). *Optimization of multiple characteristics of EDM parameters*.
- Tarng Y. (2000) *The Use of Fuzzy Logic in the Taguchi Method for the Optimization of the Submerged Arc Welding Process*
- Timm, N. (2002). *Applied Multivariate Analysis*. Springer Texts in Statistics.
- Villada F, (2007). *Diagnostico de fallas en motores de inducción mediante la aplicación de redes neuronales artificiales*.
- Wang L., (2000). *A Course In Fuzzy Systems and Control*.
- White, H. (1980). *A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity*. Econometrical 48
- Widrow B., (2014). *Intelligent Control: A Hybrid Approach Based on Fuzzy Logic Neural Networks and Genetic Algorithms*.
- Yagiz S. (2010) *Application of fuzzy inference system and nonlinear regression models for predicting rock brittleness*

Yen, J., Langari, R. (2000). *Fuzzy logic: intelligence, control and information*.
University of Michigan: Prentice Hall.

Anexo

(A1) Reglas del sistema de inferencia difuso para el proceso de maquinado

1. Si la velocidad de husillo es media y la velocidad de alimentación es media entonces el D1 es muy grande el D2 es mediano y H es mediano.
2. Si la velocidad de husillo es media y la velocidad de alimentación es alta entonces el D1 es muy pequeño el D2 es pequeño y H es muy pequeño.
3. Si la velocidad de husillo es baja y la velocidad de alimentación es alta entonces el D1 es muy grande el D2 es muy grande y H es muy pequeño.
4. Si la velocidad de husillo es baja y la velocidad de alimentación es baja entonces el D1 es pequeño el D2 es mediano y H es pequeño.
5. Si la velocidad de husillo es alta y la velocidad de alimentación es baja entonces el D1 es mediano el D2 es muy grande y H es muy pequeño.
6. Si la velocidad de husillo es alta y la velocidad de alimentación es media entonces el D1 es grande el D2 es pequeño y H es pequeño.
7. Si la velocidad de husillo es alta y la velocidad de alimentación es alta entonces el D1 es pequeño el D2 es muy pequeño y H es mediano.

(A2) Reglas del sistema de inferencia difuso para el proceso de colada

1. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es bajo entonces los poros visibles son medios, el rechupe es bajo, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es bajo.
2. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es alto entonces los poros visibles son altos, el rechupe es bajo, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es bajo.

3. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es alto entonces los poros visibles son medios, el rechupe es bajo, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es bajo.
4. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es bajo entonces los poros visibles son medios, el rechupe es medio, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es medio.
5. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es bajo entonces los poros visibles son medios, el rechupe es bajo, la falta de material es bajo, el mal llenado es medio y las marcas por flujo de metal es medio.
6. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es alto entonces los poros visibles son altos, el rechupe es alto, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es bajo.
7. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es alta entonces los poros visibles son medios, el rechupe es bajo, la falta de material es bajo, el mal llenado es bajo y las marcas por flujo de metal es bajo.
8. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es bajo entonces los poros visibles son bajos, el rechupe es medio, la falta de material es bajo, el mal llenado es alto y las marcas por flujo de metal es alto.

A(3) Reglas del sistema de inferencia difuso para el proceso de colada para la elaboración de contrapesos.

1. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es rápido entonces el peso es casi normal, SCP2 es irregular, SCP3 es deficiente y el rechupe es poco.
2. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es rápido entonces el peso es casi normal, SCP2 es malo, SCP3 es bueno y el rechupe es bastante.
3. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es lento entonces el peso es normal, SCP2 es irregular, SCP3 es irregular y el rechupe es casi nada.
4. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es lento entonces el peso es casi normal, SCP2 es rregular, SCP3 es bueno y el rechupe es poco.
5. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es lento entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es bueno, SCP3 es malo y el rechupe es casi nada.
6. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es lento entonces el peso es bastante ligero, SCP2 es muy malo, SCP3 es irregular y el rechupe es casi nada.
7. Si la temperatura del metal es media y la temperatura del molde es media y el basculamiento es normal entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es regular, SCP3 es muy malo y el rechupe es nada.
8. Si la temperatura del metal es baja y la temperatura del molde es media y el basculamiento es normal entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es malo, SCP3 es malo y el rechupe es casi nada.
9. Si la temperatura del metal es alta y la temperatura del molde es media y el basculamiento es normal entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es regular, SCP3 es malo y el rechupe es casi nada.

10. Si la temperatura del metal es media y la temperatura del molde es baja y el basculamiento es normal entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es bueno, SCP3 es deficiente y el rechupe es leve.
11. Si la temperatura del metal es media y la temperatura del molde es alta y el basculamiento es normal entonces el peso es casi normal, SCP2 es muy malo, SCP3 es regular y el rechupe es casi nada.
12. Si la temperatura del metal es media y la temperatura del molde es media y el basculamiento es rápido entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es deficiente, SCP3 es bueno y el rechupe es poco.
13. Si la temperatura del metal es media y la temperatura del molde es media y el basculamiento es lento entonces el peso es encima de lo normal, SCP2 es deficiente, SCP3 es bueno y el rechupe es casi nada.