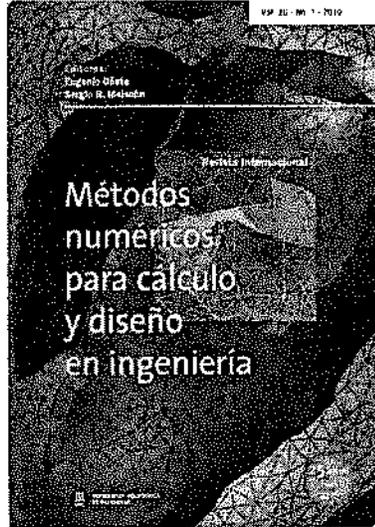


Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería

RIMNI

USUARIO: CONTRASEÑA:

- [Inicio](#)
 [Comité Editorial](#)
 [Listado de Artículos](#)
 [Suscripciones y Precios](#)
 [Autores](#)
 [Revisores](#)



© Universitat Politècnica de Catalunya (España)
 Versión impresa: ISSN 0213-1315
 Versión online: ISSN 1886-168 X
 Depósito Legal: B-8 118-1985

Editorial 25 aniversario

Scopus Citation Reports
 Factor de Impacto: 0,310



Disponible online desde 1985

Aviso de Contenido de esta revista
 Ud. recibirá el índice de cada nuevo número publicado

E-MAIL

Por favor envíenme información de las publicaciones de CIMNE

Desde 1985 la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería contribuye a la difusión en lengua castellana y portuguesa de los desarrollos teóricos y aplicaciones prácticas de los métodos numéricos, tanto en relación con su utilidad como instrumentos de cálculo y análisis para el ingeniero y el científico, como en aspectos que inciden en las nuevas tecnologías de diseño y proyecto de producción y procesos en ingeniería. La revista abarca áreas diversas, tales como, modelos matemáticos y numéricos de problemas de ingeniería, desarrollo y aplicaciones de los métodos numéricos, nuevos avances en temas de software, innovaciones en el campo del diseño por computador, aspectos didácticos de los métodos numéricos, etc. La revista constituye una fuente de información imprescindible para ingenieros y científicos sobre innumerables temas relacionados con los métodos numéricos y sus aplicaciones, contribuyendo a promover la transferencia de conocimiento interdisciplinar y, por consiguiente, a acortar la distancia que existe entre los desarrollos teóricos y las aplicaciones concretas.

EDITORES

EUGENIO ONATE

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
 Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, ESPAÑA

SERGIO R. IDELSOHN

Univ. Nacional de Litor. Santa Fe ARGENTINA
 Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona, ESPAÑA

EDITORES ASOCIADOS

ALEX H. BARBAT

E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, ESPAÑA

MANUEL DOBLARE

Centro Politécnico Superior
 Univ. de Zaragoza, Zaragoza, ESPAÑA

CARLOS A. MOTA SOARES

Instituto Superior Técnico
 Univ. Técnica de Lisboa, Lisboa, PORTUGA

ALVARO COUTINHO

Programa de Engenharia Civil COPPE/
 Univ. Federal do Rio de Janeiro, BRAZIL

JOSE MARIA GOICOLEA

E.T.S. Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de Madrid, Madrid, ESPAÑA

JAVIER OLIVER

E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, ESPAÑA

FRANCISCO CHINESTA

Dept. of Computational Mechanics
 Ecole Centrale de Nantes, Nantes, FRANCE

ANTONIO HUERTA

E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, ESPAÑA

BENJAMIN SUÁREZ

E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, ESPAÑA

EDITORES DE HONOR

EDUARDO DE ARANTES E OLIVEIRA

Instituto Superior Técnico
 Univ. Técnica de Lisboa, Lisboa, PORTUGA

MANUEL CASTEIRO

E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
 Univ. Politécnica de A Coruña, ESPAÑA

JUAN CARLOS HEINRICH

Dept. of Mechanical Engineering
 Univ. of New Mexico, Albuquerque, USA

Anteriores Editores de Honor:

O.C. ZIENKIEWICZ¹

Univ. of Swansea, UK

J.H. ARGYRIS¹

Univ. of Stuttgart, GERMANY

Publicación trimestral de la Universitat Politècnica de Catalunya (España), con la colaboración de

- Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (Barcelona, España)
- Asociación Argentina de Mecánica Computacional (Santa Fe, Argentina)
- Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (Barcelona, España)

Indexada o resumida por:

Actualidad Iberoamericana, Advanced Polymers Abstracts, Aluminum Industry Abstracts, Applied Mechanics Reviews, ArticleFirst, Bibliografía Española de Revistas Científicas de Ciencia y Tecnología, Ceramic Abstracts, Composites Abstracts, Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts Journal, Corrosion Abstracts, Current Metallurgical Publications, Diagnet, Earthquake Engineering Abstracts, Electronics and Communications Abstracts, Journal of Engineering Materials Abstracts, Environmental Engineering Abstracts, Inspex, International Aerospace Abstracts, International Building Services Abstracts, International Civil Engineering Abstracts, Journal Citation Reports/Science Edition, Landex, Materials Business File, Mathematical Reviews, MathSciNet, Mechanical & Transportation Engineering Abstracts, METADEX, OCLC, Social Science Citation Index Expanded, Solid State and Superconductivity Abstracts, Zentralblatt MATH, World Ceramics Abstracts, and Structure

[Software](#)[Info](#)[Advanced Search](#)[View Basket](#)**Publicaciones / Artículos en Revistas**

REF: RR263H

Revista Internacional Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería Vol26 Num: 3**EL PROBLEMA DE MEDIR LA DIVERSIDAD EN CONJUNTOS NO DOMINADOS Y UNA PROPUESTA DE SOLUCIÓN**

Resumen Una propiedad muy importante de los conjuntos no dominados es su diversidad. Mientras mayor sea la diversidad, más rica es la información sobre las posibles soluciones a un problema multiobjetivo. Desde el inicio de la computación evolutiva multiobjetivo se han encontrado dificultades para evaluar la diversidad de los conjuntos no dominados. Muchas métricas diseñadas con este fin, fallan en ejemplos muy sencillos. En este trabajo revisamos en qué consisten las principales fallas de las métricas de diversidad y damos una propuesta que no presenta estos problemas. Nuestra propuesta mide la diversidad de una forma diferente, considerando un hiper-volumen de influencia del conjunto y tiene un comportamiento excelente como medida de desempeño. Se probó nuestra métrica usando un benchmark publicado en la bibliografía, teniendo un desempeño perfecto. Summary Diversity is a very important property for non-dominated sets. The diversity is a measure of how much information is contained in a non-dominated set. Evaluating diversity has been a difficult issue in multi-objective evolutionary computation. Many diversity performance measures fail in simple cases. In this work, we describe the most common problems in diversity performance measures and we propose a more robust approach. The problem with most performance measures is that they consist on evaluating the standard deviation of the distances between the elements of the non-dominated sets, or a similar calculation. This dependence on a standard deviation produces a high sensibility to small changes in the non-dominated sets. Our approach is based on an hyper-volume associated to the non-dominated set. The behavior of this hyper-volume is exactly what we expect from a diversity performance measure. We tested our approach using a benchmark published in bibliography, showing an exceptional performance.

Author: Giovanni Lizárraga, Salvador Botello, Pedro Perez**Year:** 2010**Editorial:** cimne**Notes:** pp 217-224, 2010**Contents:****ISBN:****Price:** 17,00 €**On-Line:** 10,00 € [Add to shopping cart](#)

EL PROBLEMA DE MEDIR LA DIVERSIDAD EN CONJUNTOS NO DOMINADOS Y UNA PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Giovanni Lizárraga

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales S.A. de C.V.
Ciencia y Tecnología 790, C.P. 25290, Saltillo, México
Tel. 52 (844) 411-3200
glizarraga@comimsa.com

Salvador Botello

Centro de Investigación en Matemáticas
Jalisco S/N, C.P. 36240, Guanajuato, México
Tel. 52 473 732 7155 / 735 0800, Fax 52 473 732 5749
botello@cimat.mx

Pedro Perez

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales S.A. de C.V.
Ciencia y Tecnología 790, C.P. 25290, Saltillo, México
Tel. 52 (844) 411-3200
pperez@comimsa.com

Resumen

Una propiedad muy importante de los conjuntos no dominados es su diversidad. Mientras mayor sea la diversidad, más rica es la información sobre las posibles soluciones a un problema multi-objetivo. Desde el inicio de la computación evolutiva multi-objetivo se han encontrado dificultades para evaluar la diversidad de los conjuntos no dominados. Muchas métricas diseñadas con este fin, fallan en ejemplos muy sencillos. En este trabajo revisamos en que consisten las principales fallas de las métricas de diversidad y damos una propuesta que no presenta estos problemas. Nuestra propuesta mide la diversidad de una forma diferente, considerando un

hiper-volumen de influencia del conjunto, y tiene un comportamiento excelente como medida de desempeño. Se probó nuestra métrica usando un benchmark publicado en la bibliografía, teniendo un desempeño perfecto.

Palabras Clave. Frente de Pareto, Conjunto No-dominado, Diversidad, Medidas de desempeño

THE PROBLEM OF MEASURING THE DIVERSITY OF A NON-DOMINATED SET AND A SOLUTION

Abstract

Diversity is a very important property for non-dominated sets. The diversity is a measure of how much information is contained in a non-dominated set. Evaluating diversity has been a difficult issue in multi-objective evolutionary computation. Many diversity performance measures fail in simple cases. In this work, we describe the most common problems in diversity performance measures and we propose a more robust approach. The problem with most performance measures is that they consist on evaluating the standard deviation of the distances between the elements of the non-dominated sets, or a similar calculation. This dependence on a standard deviation produces a high sensibility to small changes in the non-dominated sets. Our approach is based on an hyper-volume associated to the non-dominated set. The behavior of this hyper-volume is exactly what we expect from a diversity performance measure. We tested our approach using a benchmark published in bibliography, showing an exceptional performance.

Key words. Pareto Front, Non-dominated set, Diversity, Performance measures

1 Introducción

En Optimización Multi-Objetivo (OMO), se trabaja con problemas planteados de la siguiente forma ¹:

$$\text{Minimizar } F(x) = \langle f_1(x), \dots, f_m(x) \rangle \quad (1)$$

$$\text{sujeto a : } x \in X \subset R^n \quad (2)$$

¹En este trabajo asumimos que todas las funciones objetivo se deben minimizar. Esto no nos hace perder generalidad, ya que cualquier problema multi-objetivo que contenga funciones a maximizar puede transformarse en un problema equivalente que sólo tiene funciones a minimizar.

donde X es el conjunto de todas las soluciones factibles al problema.

En OMO no existe una idea clara “a priori” de cómo identificar la solución óptima para un problema, pues se desconoce el compromiso entre las diferentes funciones objetivo $f_i(x)$. Para poder identificar la solución óptima, es común recolectar un conjunto de posibles soluciones. A este conjunto le llamamos conjunto no dominado. Al observar este conjunto de soluciones es posible tener una idea más clara de que tipo de solución es la que más nos conviene. O incluso, elegir la solución final a nuestro problema de entre los elementos del conjunto no dominado.

Es evidente que la calidad y cantidad de la información presente en un conjunto no dominado es sumamente importante. Para un mismo problema y dependiendo del método de recolección, es posible obtener diferentes conjuntos. Por lo tanto, es necesario algún método para evaluar que tan bueno es un conjunto no dominado. Esto con varios fines, como por ejemplo, tener una idea de que tan rica es la información sobre la que se está tomando una decisión. También es importante para identificar que métodos de recolección dan mejores resultados.

Las dos principales propiedades de un conjunto no-dominado son convergencia y diversidad, cuya definición se dará más adelante. En este trabajo nos enfocaremos solamente en diversidad, probablemente la propiedad más difícil de evaluar. Las métricas diseñadas para medir diversidad fallan fácilmente en casos muy sencillos, por lo que es necesario idear nuevas métricas. En este trabajo explicamos algunas de las causas de estas fallas y proponemos una nueva métrica que es mucho más robusta.

El resto del artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 introducimos los conceptos más relevantes para este trabajo de la OMO. En la Sección 3 explicamos algunos de los problemas más comunes de las métricas de diversidad. En la Sección 4 discutimos el concepto de diversidad y proponemos una nueva forma de evaluarla. En la Sección 5 sometemos nuestra propuesta a casos de prueba. Finalmente, damos nuestras conclusiones en la Sección 6.

2 Conceptos Básicos

En Optimización Multi-Objetivo, cada solución factible x es evaluada en base a varias funciones objetivo, es decir, en base a un vector de números reales $F(x) = \langle f_1(x), \dots, f_m(x) \rangle$. Comparar dos soluciones $x, y \in X$ es complicado si no existen preferencias por ninguna función objetivo. Cuando se desean comparar vectores, es común utilizar el Criterio de Optimalidad de Pareto (COP). COP describe una relación binaria entre vectores lla-

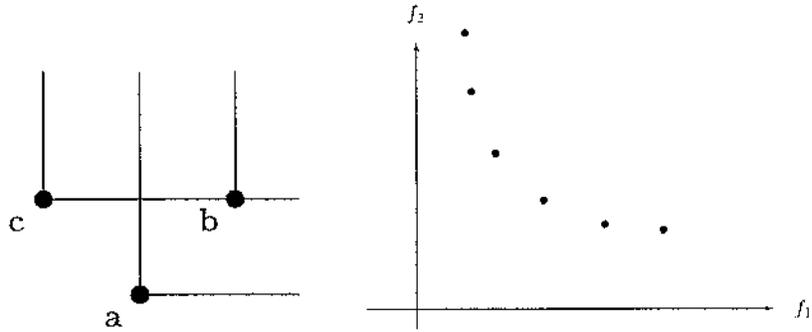


Figure 1: Ejemplos de dominancia (izquierda) y un conjunto no dominado (derecha).

mada dominancia. La definición de dominancia nos dice que un vector w domina a un vector z ($w \text{ dom } z$) si z no es mejor que w en cualquiera de las funciones objetivo y que existe al menos una función objetivo para la cual w es mejor que z . En notación matemática (y tomando en cuenta que solo consideramos funciones a minimizar) dominancia se define como: $w \text{ dom } z \equiv \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, a_i \leq b_i \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_j < b_j$, donde $w, z \in R^m$ y a_i representa el i -ésimo elemento de a .

Es evidente que si un vector w domina a un vector z , entonces w es mejor que z . Desafortunadamente, aún con COP es posible tener vectores incomparables, es decir, casos donde ni w domina a z ni z domina a w . Un conjunto no dominado es un conjunto de vectores mutuamente incomparables. Para ejemplificar estos conceptos, en la Figura 1, lado izquierdo, se ven tres vectores a , b y c . Podemos ver que $a \text{ dom } b$, $c \text{ dom } b$, pero a y c son incomparables bajo COP. En la misma figura, lado derecho, vemos un conjunto de puntos no dominados. Cualquier par de vectores en este conjunto son incomparables entre sí.

En un problema multi-objetivo, podemos asumir sin temor a error, que una solución x es mejor que una solución y si $F(x)$ domina a $F(y)$. De manera que es posible descartar a todas aquellas soluciones dominadas y concentrarnos en aquellas soluciones en X que no son dominadas por ninguna otra solución en X . Al conjunto de todas las soluciones factibles que no son dominadas por ninguna otra solución factible, se le llama Conjunto de Pareto (CP). Al la imagen de CP bajo el vector de funciones objetivo $F(x)$ se le llama Frente de Pareto (FP). Una representación gráfica de los conceptos mencionados en este párrafo se muestran en la Figura 2.

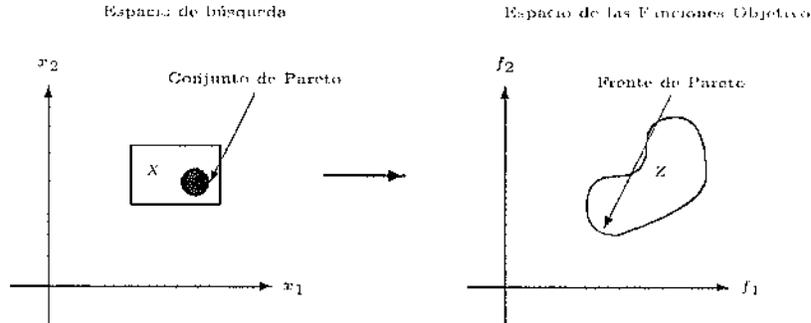


Figure 2: Elementos importantes de un problema multi-objetivo.

La calidad de una solución factible depende de sus valores en las funciones objetivo, por lo que el resto de la discusión de este artículo se desarrolla en el espacio de las funciones objetivo. Para más información sobre Optimización Multi-Objetivo, recomendamos la lectura de Coello [1] y Deb [2].

Independientemente de cuales sean las preferencias finales sobre las funciones objetivo, la solución óptima del problema será un elemento del Frente de Pareto. Por lo tanto, se busca obtener una aproximación al FP para clarificar preferencias y ser capaz de identificar la solución final al problema. Una aproximación al FP consiste en un conjunto no-dominado de tamaño finito. En el resto del artículo se usaran los términos aproximación y conjunto no dominado como equivalentes.

Se han propuesto muchas metodologías para aproximar el frente de Pareto, sin embargo una pregunta frecuente es que tan buena es una aproximación. Medir la calidad de un conjunto no-dominado no es fácil. En general se consideran dos propiedades principales: convergencia, que se refiere a que tan cerca está la aproximación al FP; y diversidad, que se refiere a que tan rica es la información que aporta la aproximación sobre el frente de Pareto. En este artículo nos enfocamos en diversidad, y asumimos una situación donde la convergencia no es un factor de discriminación entre los conjuntos no-dominados que se están comparando. Un ejemplo de esta situación es cuando todas las aproximaciones a comparar son subconjuntos del Frente de Pareto.

La diversidad de un conjunto no-dominado se ha interpretado de varias maneras. En la siguiente sección mostramos algunas de estas interpretaciones, describimos algunas métricas de diversidad basadas en estas inter-

pretaciones y explicamos cuales son los problemas que asociados a ellas.

3 Medidas de Diversidad

Una interpretación muy común de diversidad es que los elementos de un conjunto no dominado deben estar equiespaciados entre ellos. Existen muchos ejemplos de métricas basadas en esta idea. Por ejemplo la métrica de distribución de Schott (f) [3], la métrica de distribución de Deb [4], la medida de dispersión basada en entropía de Farhang y Azarm [5] y muchas otras.

El problema con las métricas que miden la uniformidad en la distribución de los vectores, es que carecen de una propiedad muy importante. Esta propiedad es llamada monotonía [6] y se enuncia a continuación:

Definition 1 *Una métrica I tiene la propiedad de monotonía si al agregar nuevos elementos a un conjunto no dominado A , la valoración que da I a A mejora.*

Evidentemente, al agregarle más elementos a un conjunto no dominado, la cantidad de información que el conjunto nos proporciona es mayor, y por lo tanto debe tener una mejor evaluación. Desafortunadamente, toda métrica que mida la uniformidad en la distribución de un conjunto no dominado viola el principio de monotonía. Para ver esto, considere la Figura 3. En esta figura vemos que B tiene los mismos elementos que A más un vector, por lo que B debe ser considerado mejor que A . Pero una métrica basada en uniformidad va a evaluar a A como mejor que B pues A tiene más uniformidad en sus elementos. Mientras mejor sea una métrica para evaluar uniformidad, más fácilmente caerá en este error.

Un ejemplo más extremo se da cuando comparamos B con C en la Figura 3. Como C es más uniforme, será considerado como mejor que B , a pesar de que B contiene mucha más información. En general la medidas de uniformidad ignoran el número de elementos contenidos en las aproximaciones. Una métrica que toma en cuenta uniformidad y número de elementos es el índice M_2 de Zitzler [7], pero aún así carece de monotonía.

También se ha relacionado la diversidad con el número final de vectores generados. Esto debe manejarse con cuidado pues pueden darse casos como el mostrado en la Figura 4, donde el conjunto A tiene menos elementos que el conjunto B . Sin embargo, los elementos del conjunto B están aglomerados en un pequeño espacio, por lo que dan casi la misma información, mientras que los elementos de B se encuentran bien distribuidos. El número de vectores

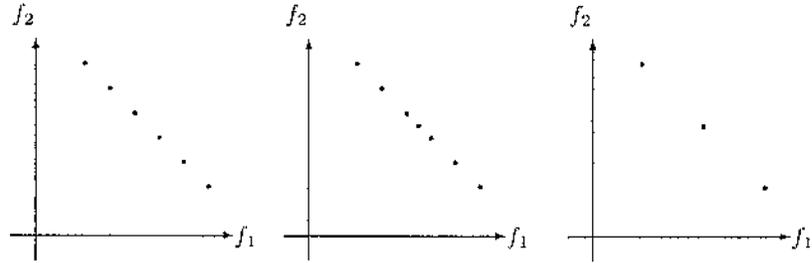


Figure 3: Tres conjuntos no dominados: A (izquierda), B (centro) y C (derecha).

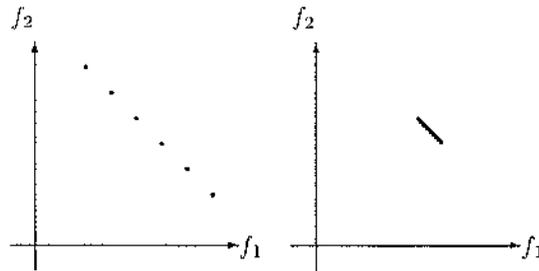


Figure 4: Dos conjuntos no dominados con diferencias en el número de elementos: A (izquierda) 6 elementos, B (derecha) 10 elementos.

generados se usa en combinación con otras medidas de diversidad para poder hacer evaluaciones mas confiables.

Otra interpretación que se le ha dado a la diversidad es el concepto de extensión. La extensión, como su nombre lo sugiere, se refiere a que tan amplia es la zona del Frente de Pareto que abarca un conjunto no dominado. Se han dado pocas propuestas en este sentido, como por ejemplo la Máxima Dispersión de Zitzler [7], que consiste en la distancia entre los valores extremos del conjunto no dominado. Otro ejemplo es la métrica de cobertura de Farhang y Azarm [8], que está basada en conos convexos para decidir cuando una aproximación tiene mejor extensión que otra. Medir solamente extensión puede dar un panorama limitado y engañoso de la diversidad. Para ver esto, obsérvese la Figura 5. Aquí vemos que A nos ofrece una gran cantidad de información sobre el Frente de Pareto, mientras que B solo tiene dos vectores. Sin embargo, B se considera mejor desde el punto de vista de extensión por abarcar una distancia mayor con estos dos vectores, lo cual es contradictorio.

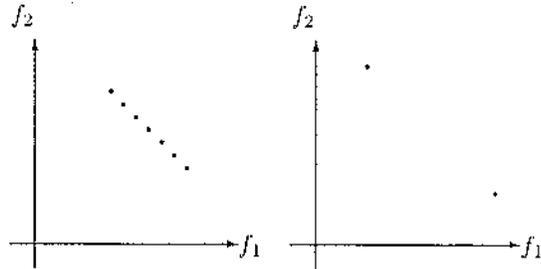


Figure 5: Dos conjuntos no dominados con diferencias en extensión: A (izquierda), B (derecha).

4 Una Nueva Propuesta de Diversidad

En esta sección proponemos una métrica de diversidad que no está basada en ninguna de las ideas presentada en la sección anterior, sino que parte de otro principio. Este principio combina, de forma natural, la noción intuitiva de cuando una aproximación tiene una mejor diversidad que otra.

Imaginense el caso hipotético donde podemos analizar todos los elementos del Frente de Pareto. Bajo esta condición especial, es factible pensar que podemos identificar la verdadera solución óptima para nuestro problema multi-objetivo. Llamémosle z^* a esta solución óptima. En la práctica, z^* no puede ser identificada de antemano pero se busca identificarla usando aproximaciones al Frente de Pareto, ya que z^* es un elemento de FP. Ahora, suponiendo un FP con un número infinito de elementos y considerando que las aproximaciones al Frente de Pareto son conjuntos finitos. ¿Cuál es la probabilidad de que z^* sea un elemento de una aproximación? La respuesta es, por supuesto cero. Excepto en casos donde el Frente de Pareto tenga un número relativamente pequeño de elementos, podemos considerar que la solución óptima a un problema multi-objetivo no estará contenida en una aproximación. A lo más que podemos aspirar es a que la aproximación tenga una solución cercana a z^* .

A priori, cualquier elemento del Frente de Pareto puede ser la solución óptima. Por lo tanto, una buena aproximación al FP será aquella que proporcione vectores cercanos a cualquier elemento del FP. De manera que una aproximación tiene una mejor diversidad mientras mayor sea su capacidad de proporcionar vectores parecidos a cualquier elemento aleatorio del Frente de Pareto.

Se usa esta nueva definición de diversidad para construir una métrica

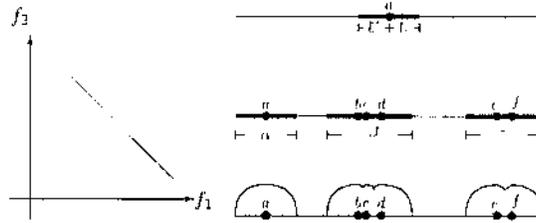


Figure 6: Un Frente de Pareto continuo (izquierda). Propuestas para métricas de diversidad (derecha).

robusta. Imagínese un Frente de Pareto continuo y recto (con fines de simplificar la explicación) como el que se muestra en la Figura 6, lado izquierdo. Para facilitar el análisis, se rota ese Frente de Pareto hasta dejarlo horizontal, como se muestra en la Figura 6, lado derecho, parte superior. Vamos a asociar a cada elemento de una aproximación una zona de influencia determinada por un radio U . Por ejemplo, al vector a en la Figura 6, lado derecho, parte superior, le vamos a asociar todos aquellos elementos del Frente de Pareto que estén a una distancia de a menor a o igual a U . Se dice que estos elementos están “cubiertos” por a . La interpretación de esta zona de influencia, es que para cualquier elemento z del FP cubierto por a , el vector a representa una solución equivalente, para la cual podemos tomar a a como un sustituto de z .

Dada una aproximación al Frente de Pareto como la mostrada en la Figura 6, lado derecho, parte central, podemos considerar como métrica de diversidad a la longitud de la unión de las zonas de influencia de todos los elementos de la aproximación. En la Figura 6, lado derecho, parte central, esta longitud sería igual a $\alpha + \beta + \gamma$. Esta métrica de diversidad es una función de beneficio que da un valor más alto a una aproximación que cubre más elementos del Frente de Pareto.

Una desventaja de esta métrica de diversidad es que, una vez que todos los elementos del FP están cubiertos, agregar más vectores a la aproximación no mejorará su valoración. Debido a esto se introduce un modificación. A cada elemento z del Frente de Pareto se le asigna un peso $w(z)$, cuyo valor depende del elemento más cercano de una aproximación A . Este peso está dado por la siguiente fórmula:

$$w(z) = \begin{cases} \sqrt{U^2 - d(z, a_{ncar})^2} & \text{si } d(z, a_{ncar}) \leq U \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (3)$$

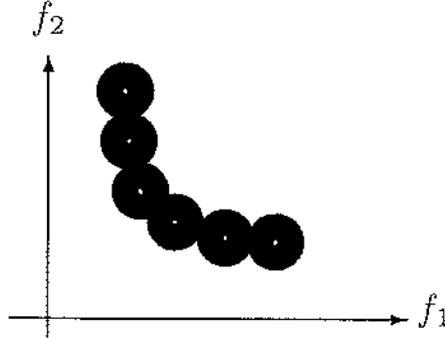


Figure 7: $B2$.

donde $d(x, y)$ es la distancia Euclídana entre x y y , a_{near} es el elemento de A más cercano a z . Y se redefine nuestra métrica de calidad, llamada B , como:

$$B(A) = \int_{z \in PF} w(z) dz \quad (4)$$

B puede visualizarse como el área de la unión de los semicírculos que se muestran en la Figura 6, lado derecho, parte inferior. En la práctica, B puede ser muy difícil de calcular, pues necesitamos conocer el FP. Además que para diferentes problemas multi-objetivo, los Frentes de Pareto correspondientes pueden tener muchas topologías diferentes. Diferentes topologías pueden hacer aún más difícil calcular B . Para resolver esto, se hará un cambio más. En vez de definir nuestra métrica de diversidad a través de una función de peso w , simplemente se asocia un círculo de radio U a cada uno de los elementos de una aproximación, y se define una nueva métrica de diversidad, llamada $B2$, como el área de la unión de todos estos círculos. Notese que $B2$ no tiene las dificultades de cálculo que tiene B . Para calcular $B2$ no es necesario conocer el Frente de Pareto y la topología de este es irrelevante. El valor de $B2$ depende únicamente de la posición de los vectores de la aproximación y de el valor de U . Una representación gráfica de $B2$ para una aproximación es como se ve en la Figura 7.

Ahora se generalizará la definición de $B2$ para cualquier dimensión. Sea $b(a, U)$ la bola de radio U cuyo centro es a . Sea $\mu(X)$ la medida de un conjunto X , por ejemplo área, volumen, hipervolumen, etc. La definición de $B2$ es la siguiente, para una aproximación A :

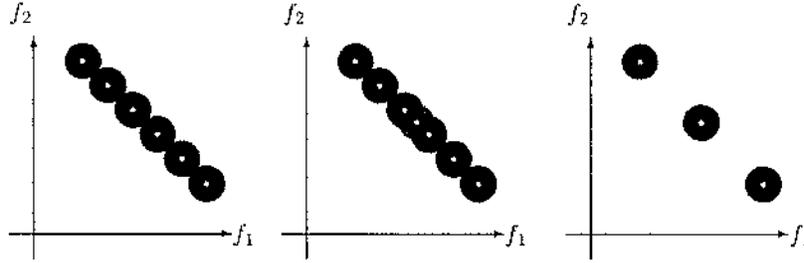


Figure 8: Tres conjuntos no dominados: A (izquierda), B (centro) y C (derecha).

$$B2(A) = \mu\left(\bigcup_{a \in A} b(U, a)\right) \quad (5)$$

$B2$ tiene la propiedad de monotonía. Cada nuevo vector que se agrega a un conjunto no dominado agrega una mayor cantidad de área, por lo que la evaluación de una aproximación se incrementa conforme se incluyen nuevos elementos. Esto se puede ver en la Figura 8, donde se reproducen las aproximaciones de la Figura 3, pero con las bolas asociadas a los vectores. Podemos ver que el conjunto B tiene una mayor área respecto al conjunto A gracias a la aportación que hace el vector extra en B . Cuando comparamos B con C o A con C , vemos que C tiene una menor área debido a que tiene muy pocos elementos, a pesar de que estos están muy bien dispersos. Por esto, nuestra propuesta es más robusta en estos casos.

También es fácil ver que $B2$ es robusta en casos como el de la Figura 4, la cual reproducimos en la Figura 9, pero agregando bolas a los vectores. Como se puede apreciar, el conjunto B tiene poca área debido a que sus bolas asociadas están muy cerca unas de otras y se crean muchas intersecciones. Mientras que en el conjunto A se da muy poca intersección, ya que sus elementos están separados unos de otros.

Para casos como el de la Figura 5, nuestra propuesta también es robusta, pues aproximaciones que tengan elementos muy alejados pero que aportan poca información intermedia, tendrán áreas más pequeñas.

Un punto importante es como elegir el radio U de las bolas. Una de las razones por las que $B2$ funciona, es por las intersecciones entre bolas. Conjuntos con buena diversidad tienen pocas intersecciones y una mayor área. Conjuntos con una diversidad pobre tienden a tener un número mayor de intersecciones y un área pequeña. Sin embargo, si U es demasiado pequeño.

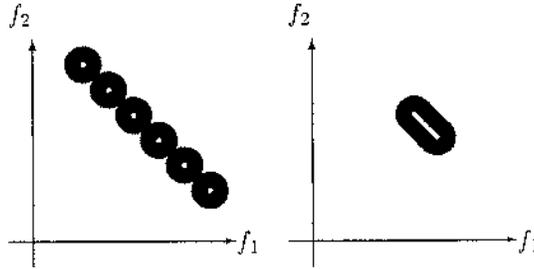


Figure 9: B2.

es posible que no se den intersecciones aún en conjuntos con diversidad pobre. Pueden sugerirse muchas formas de fijar el valor de U . En nuestro caso se decidió calcular el valor de U como el promedio de las distancias entre cada vector y su vecino más cercano. De esta manera pueden garantizarse intersecciones en conjuntos con elementos muy cercanos entre ellos.

Otro punto muy importante es la complejidad computacional. Calcular la medida de un conjunto de N de bolas tiene complejidad $N \log N$ en dos dimensiones y N^2 en tres dimensiones [9]. Para más de tres dimensiones no conocemos un algoritmo exacto, pero se puede aproximar con una integración Montecarlo en tiempo lineal [10].

5 Experimentos

Para evaluar la validez de nuestra propuesta, usamos algunos casos de pruebas publicados en [11]. Cada uno de estos casos consiste en varios conjuntos no dominados con diferentes grados de calidad, y es evidente a la vista que conjunto no dominado es mejor que otro. Para pasar las pruebas, una métrica debe evaluar los conjuntos para ordenarlos del mejor al peor correctamente. Usamos los casos de prueba 3, 4, 5, 6, 7 y 8. No usamos los casos de prueba 1 y 2 pues en estos casos se evalúa convergencia. Cada caso de prueba cuenta con 5 conjuntos no dominados: A , B , C , D y E , excepto el caso de prueba 6 que solo tiene dos conjuntos: A y B .

Para representar las relaciones de calidad entre conjuntos no dominados se usan los símbolos “ $>$ ” y “ $=$ ”. Por ejemplo, $A > B$ significa que A es mejor que B ; $A = B$ significa que A es igual de bueno que B . También se crean cadenas de relaciones como por ejemplo $A > B = C > D = E$, que significa que A es mejor que todos los demás conjuntos; B y C son igual de buenos y superiores a D y E ; y D y E son igual de buenos.

Table 1: Resultados correctos de los casos de prueba

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
4	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

Table 2: Resultados de la métrica B2

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
4	$A > B > C > D > E$	$A > B > C > D > E$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

Cada caso de prueba tiene una versión en dos dimensiones y en tres dimensiones. La descripción de cada caso de prueba puede encontrarse en [11]. En la Tabla 1, se muestran los resultados esperados de los casos de prueba. En la Tabla 2, se presentan los resultados para nuestra propuesta. A modo de comparación, en la Tabla 3 se muestran los resultados para la métrica de distribución de Schott (f) [3]. Como se puede observar, nuestra propuesta resuelve correctamente todos los casos de prueba, mientras que f falla en los casos 3 y 4. Esto demuestra lo confiable y robusta que es nuestra métrica de diversidad.

6 Conclusiones

En este trabajo espusimos varios de los problemas más frecuentes que se encuentran en las métricas de diversidad para conjuntos no dominados. Con el objetivo de crear una nueva propuesta, analizamos el concepto de diversidad y lo redefinimos como la capacidad de un conjunto no dominado de proveer soluciones parecidas a cualquier elemento del Frente de Pareto. En base a esta definición construimos, una nueva métrica de diversidad que tiene

Table 3: Resultados para la métrica de distribución de Schott

Prueba	Dos dimensiones	Tres dimensiones
3	$D > C > B > A > E$	$E > D > C > B > A$
4	$C > D > E > B > A$	$E > D > B > C > A$
5	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$
6	$A = B$	$A = B$
7	$A = B = C = D = E$	$A = B = C = D = E$
8	$E > D > C > B > A$	$E > D > C > B > A$

varias propiedades deseables y demostró ser robusta en casos engañosos. Para evaluar nuestra propuesta usamos algunos casos de prueba publicados en la literatura, los cuales resolvió correctamente, superando a otra métrica muy citada en la bibliografía.

References

- [1] Carlos A. Coello, D. Van Veldhuizen, and G. B. Lamont. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, USA, 2002.
- [2] Kalyanmoy Deb. *Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2001.
- [3] J.R. Schott. *Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1995.
- [4] Kalyanmoy Deb, Samir Agrawal, Amrit Pratab, and T. Meyarivan. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II. In Marc Schoenauer, Kalyanmoy Deb, Günter Rudolph, Xin Yao, Evelyne Lutton, J. J. Merelo, and Hans-Paul Schwefel, editors, *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, pages 849-858, Paris, France, 2000. Springer. Lecture Notes in Computer Science No. 1917.
- [5] A. Farhang-Mehr and S. Azarm. Diversity assessment of pareto optimal solution sets: an entropy approach. *IEEE International Conference on E-Commerce Technology*, 1:723-728, 2002.

- [6] Joshua Knowles and David Corne. On Metrics for Comparing Non-dominated Sets. In *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2002)*, volume 1, pages 711–716.
- [7] Eckart Zitzler. *Evolutionary Algorithms Multiobjective Optimization: Methods and Applications*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), November 1999.
- [8] A.F. Mehr and S. Azarm. Minimal sets of quality metrics. In *EMMO 2003, Lecture Notes in Computer Science 2632*, pages 405–417. C.M. Fonseca et al. (Eds.).
- [9] David Avis, Binay K. Bhattacharya, and Hiroshi Imai. Computing the volume of the union of spheres. *The Visual Computer*, 3(6):323–328, 1988.
- [10] P. G. Spirakis. The volume of the union of many spheres and point inclusion problems. In *Proceedings on STACS 85 2nd annual symposium on theoretical aspects of computer science*, pages 328–338, New York, NY, USA, 1985. Springer-Verlag New York, Inc.
- [11] Giovanni Lizárraga, Arturo Hernández, and Salvador Botello. A set of test cases for performance measures in multiobjective optimization. In *MICAI '08: Proceedings of the 7th Mexican International Conference on Artificial Intelligence*, pages 429–439, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.