CORPORACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATERIALES

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

INCORPORACIÓN DE LOS EFECTOS QUE EL MEDIO AMBIENTE OPERACIONAL TIENE SOBRE LA CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA

POR

M.C. DAVID SALVADOR GONZÁLEZ GONZÁLEZ

TESIS

DOCTORADO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE MANUFACTURA

SALTILLO, COAH. DICIEMBRE DEL 2010

Incorporación de los Efectos que el Medio Ambiente Operacional tiene sobre la Confiabilidad de un Sistema

por

M.C. David Salvador González González

Tesis

Presentada al Programa Interinstitucional en Ciencia y Tecnología

Sede

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales S.A. de C.V.

como requisito parcial para obtener el grado académico de

Doctor en Ciencia y Tecnología
Especialidad en Ingeniería Industrial y Manufactura

Programa Interinstitucional en Ciencia y Tecnología /Comimsa

Saltillo Coahuila, Diciembre del 2010

Incorporación de los Efectos que el Medio Ambiente Operacional tiene sobre la Confiabilidad de un Sistema

por

M.C. David Salvador González González

Comite Revisor

Tutor Académico: Dr. Mario Cantú Sifuentes
PICYT-Ing. Industrial y Manufactura-COMIMSA

Revisor No.1: Dr. Francisco Javier Barriga Ordóñez
Compañía DEACERO planta aceria

Revisor No.2: Dra. Martha Patricia Guerrero Mata
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica UANL

Revisor No.3: Dr. Federico Zertuche Luis
Instituto Tecnológico de Saltillo

Revisor No.4: Dr. Mauricio Alberto Garza Castañón
PICYT-Ing. Industrial y Manufactura-COMIMSA

Tutor de planta: Ing. José Rodolfo Aguilar Otero
Aplicación Tecnológica / Corporación Mexicana de Investigación en Materiales

Saltillo Coahuila, Diciembre del 2010

A MI FAMILIA:

Alejandra, Daniela y Pamela

A MIS PADRES:

Enrique y Maria Elena

A MIS HERMANOS:

Myriam, Mario y Rosa Elena

A MIS AMIGOS

Agradecimientos

A Dios por permitirme concluir una de las metas más importantes de mi vida profesional.

A mis padres Enrique González y Maria Elena González; y **a mis hermanos Myriam, Mario y Rosa Elena González** por su apoyo incondicional.

A mi familia Alejandra, Daniela y Pamela por ser la principal motivación en mi vida.

A mi buen amigo **Rolando Praga** por su apoyo y amistad incondicional.

A mi tutor, Dr. Mario Cantú Sifuentes por compartir sus conocimientos y principalmente por brindarme su amistad.

A los académicos que de forma directa e indirecta contribuyeron en mi formación **Dr. Luis Martín Torres Treviño**, **Dr. Pedro Pérez Villanueva**, **Dr. Miguel Gastón Cedillo Campos**, **Dr. Arturo Reyes**, **Dr. Federico Zertuche Luis**; principalmente al **Dr. Manuel Román Piña Monarrez** por su apoyo y conocimientos; gracias por su amistad.

Al **Dr. Héctor Mancha Molinar** por sembrar el interés (la semilla) por la investigación.

A todos mis compañeros y amigos, que conocí durante mis estudios y que siempre los llevaré presentes, especialmente: a todos.

A la **M. C. Claudia González**, coordinadora del Posgrado de COMIMSA por el apoyo brindado durante mis estudios y por creer siempre en mi.

Al Jurado: **Dr. Francisco Javier Barriga Ordóñez**, **Dra. Martha Patricia Guerrero Mata**, **Dr. Federico Zertuche Luis** y **Dr. Mauricio Alberto Garza Castañón**, por sus excelentes comentarios y recomendaciónes, que contribuyeron en la mejora de este trabajo de investigación.

A las personas que día a día hacen posible el desempeño del Posgrado COMIMSA, **personal administrativo del posgrado**.

Agradezco los apoyos recibidos durante mi formación doctoral a dos importantes Instituciones del ámbito Científico y Tecnológico de este país; sin ellas mi progreso y desarrollo académico, actividades de movilidad e investigación y producción científica no hubieran sido posibles: **El Consejo Nacional en Ciencia y Tecnología** (CONACYT) y a la **Corporación Mexicana de Investigación en Materiales**.
A mi tutor de planta, **Ing. José Rodolfo Aguilar Otero**, al **Ing. Jesus H. García Ortiz** y al **Ing. Juan Antonio Lara** por su apoyo durante el proyecto.

Resumen

Hoy en día, las empresas de clase mundial realizan la optimización del mantenimiento de sus equipos mediante estrategias basadas en confiabilidad, con el fin de reducir la posibilidad de pérdida o daño humano, ambiental y de sus equipos; donde prevenir fallas, reducir costos e incrementar la seguridad, son factores primordiales. En este contexto, la metodología comúnmente aplicada para la inspección y mantenimiento está basada en la evaluación del riesgo, estructurando técnicas de Inspección Basada en Riesgo (RBI), estudios de integridad estructural, mantenimiento estratégico y la estimación de la vida remanente de los sistemas o componentes. La metodología RBI estima el riesgo mediante el producto de la probabilidad de ocurrencia de las fallas con la consecuencia de la misma $Riesgo_i = P_i \cdot C_i$. Considerando que la probabilidad de falla P_i es de gran importancia, estimar tal probabilidad de forma adecuada, es el principal objetivo de la investigación.

La probabilidad de falla y la confiabilidad de las instalaciones en campo, es afectada por factores de operación como la temperatura, el desgaste, parámetros de proceso entre otros. Por consecuencia, la obtención de estimaciones confiables de la probabilidad de falla P_i, depende fuertemente de la incorporación de los efectos que el medio ambiente operacional tiene sobre la confiabilidad del sistema o componente. Por lo tanto, es de interés encontrar modelos estadísticos que se ajusten a datos de tiempo de vida incluyendo factores operacionales representados mediante covariables

Para este fin, existe el modelo semi-paramétrico y el paramétrico de riesgo proporcional (Log-Normal, Exponencial, Gamma y Weibull), que incluyen factores operacionales en la estimación de la probabilidad de falla (Harrell, 2001).

En los modelos de riesgo proporcional, se encontró que debido al método de ajuste, refiriéndose específicamente al método de máxima verosimilitud, tales modelos se ven severamente afectados cuando la matriz de covariables está correlacionada, es decir presenta colinealidad ocasionando inestabilidad en la estimación de los parámetros.

La función de verosimilitud parcial forma una función estacionaria lo cual provoca que la convergencia del método de Newton-Raphson sea lenta, alcanzando soluciones subóptimas.

Además, el efecto de la colinealidad se refleja en la varianza estimada para cada parámetro, es decir el error estándar es demasiado grande, trayendo como consecuencia la probabilidad de cometer error en la inferencia realizada para probar la significancia de las variables en cuestión.

Debido al impacto que tiene la colinealidad sobre la estimación del riesgo y tomando en consideración los avances encontrados en el tema, la presente investigación se enfoca en el análisis y solución de los problemas mencionados, tomando en cuenta que tal estimación es determinante para la aplicación de la Inspección Basada en Riego (RBI), así como la elaboración de programas de inspección, la realización de planes de mantenimiento y prevención de riesgos.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introducción

Las tecnologías comúnmente aplicadas para la inspección y mantenimiento están basadas en la evaluación del riesgo, estructurando de alguna forma las técnicas de Inspección Basada en Riesgo (RBI) incluyendo estudios de integridad estructural, mantenimiento estratégico y la estimación de la vida remanente de los sistemas o componentes. El RBI combina la probabilidad de ocurrencia de las fallas y sus consecuencias. En la evaluación del riesgo, la ocurrencia está expresada en términos de la probabilidad de falla, por lo que en su estimación se involucran herramientas de ingeniería de confiabilidad, entre las cuales se destaca el Análisis Weibull.

Por otro lado, la consecuencia es un parámetro relacionado con el escenario o ambiente operacional donde se encuentra instalado el sistema o componente. Tal parámetro, está medido en unidades monetarias (términos financieros) o en unidades de área (API RBI, 2008). La información obtenida del producto de la probabilidad de falla con la consecuencia, es utilizada en la elaboración de programas de inspección para controlar el riesgo a falla en los equipos, elaborando planes de mantenimiento; en esto la probabilidad de falla es de gran importancia.

En RBI el riesgo del i-ésimo componente se define mediante la siguiente ecuación:

$$Riesgo_i = P_i \cdot C_i; \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.1}$$

Donde C_i es la consecuencia del i-ésimo escenario de eventos que traen como resultado

la exposición al riesgo, es decir, una medida del daño o perdida del escenario y P_i es la probabilidad de ocurrencia del escenario i. La cual está en función del tiempo de vida, t, del componente en cuestión, y se denota como la función de distribución de probabilidad acumulada $F(t)$ (API RBI, 2008). Se puede observar que $F(t)$ depende directamente de la vida útil de la máquina, sistema o componente que se está analizando, convirtiéndose por consecuencia en parte importante para el cálculo del riesgo, y por lo tanto, el estimar P_i de forma adecuada se torna en tema de investigación.

Las consecuencias están relacionadas directamente con el ambiente operacional (o escenario) donde se encuentra instalado el sistema o componente, lo cual indica que para la estimación de P_i también es necesario tomar en consideración factores operacionales como la temperatura, el desgaste, parámetros de proceso entre otros, que afecten la probabilidad de falla del componente o sistema.

En la elaboración de programas de inspección es necesaria una estimación del riesgo, de la cual la probabilidad de falla, P_i, es un ingrediente esencial. Por tanto, es necesario que las estimaciones que se realicen de P_i sean confiables; esto depende fuertemente de la incorporación de los efectos que el medio ambiente operacional tiene sobre la confiabilidad del sistema o componente.

Si el ambiente operacional tiene un fuerte impacto en el desempeño del producto y no es considerado en la estimación de la probabilidad de falla, el resultado de los indicadores de confiabilidad no representa de manera confiable el comportamiento de los equipos o componentes y por consecuencia, el plan o los planes de mantenimiento basados en indicadores con éstas características, no será del todo factible debido a la confianza en la estimación.

Además de las observaciones anteriores, las estimaciones de probabilidad de ocurrencia, dependen en gran manera de la aplicación adecuada de las herramientas de ingeniería de confiabilidad.

Una de las técnicas más utilizadas para estimar probabilidad de falla basada en datos

medidos de algún componente, relacionados con su modo de falla es el análisis Weibull (aplicación de la distribución de probabilidad Weibull), que es útil por su capacidad para simular un amplio rango de distribuciones como la Normal y la Exponencial entre otras (Abernethy, 2008). El primer paso para la realización de un análisis Weibull es la obtención adecuada de datos de tiempos de vida. Los datos de tiempo de vida (o ciclos de falla) son información especial dado que se debe conocer la edad de los componentes o sistemas en cuestión. El concepto de edad puede representar tiempo de operación, inicio y fin, ciclos de fatiga, ciclos o tiempo a exposición de estrés o alta temperatura u otros parámetros.

Dadas las características anteriores, es de interés encontrar modelos estadísticos que se ajusten a datos de tiempo de vida que incluyan factores operacionales representados mediante covariables, o modelos que simplemente sean capaces de representar y pronosticar de cierta forma la vida de los componentes con o sin considerar factores de operación según sea el caso de estudio.

Para este fin, existen algunos modelos tales como el modelo paramétrico y semiparamétrico de riesgo proporcional que incluyen factores operacionales en la estimación de la probabilidad de falla, así como los modelos paramétricos Log-Normal, Exponencial, Gamma y Weibull que utilizan solo tiempos de vida (Harrell, 2001). Generalmente, el modelo Weibull (único modelo utilizado en el API 581) representa, en general, de forma adecuada este tipo de información, sin embargo, en ocasiones los tiempos de vida no son compatibles con tal modelo, estos casos motivan a la utilización de otros modelos que pueden ser útiles para representarlos. Con este fin, es necesaria la utilización de herramientas estadísticas para seleccionar el modelo, en algún sentido, más adecuado. Para esto, se incluyen los modelos Exponencial, Gamma y Log-normal, además del modelo no paramétrico Kaplan Meier, en el caso de la estimación sin considerar factores operacionales.

Por otro lado, para estimar la probabilidad de falla considerando los efectos del medio ambiente operacional (factores de operación como temperatura, factores de desgaste, pará-

metros de proceso, etc.), existen modelos tales como los paramétricos o semi-paramétricos de riesgo proporcional.

Los modelos de riesgo proporcional representan una generalización de un modelo de sobrevivencia en forma de un modelo de regresión, el cual está conformado por la función de riesgo, $\lambda(t)$, multiplicada por la exponencial de los cofactores $\exp(X\beta)$ y es generalizado, cambiando la función de riesgo $\lambda(t)$ para un tiempo determinado T, por la función de riesgo $\lambda(T|X) = \lambda(t)\exp(X\beta)$ para un tiempo de falla, dados los cofactores X.

Dentro de estos modelos de sobrevivencia, el más usado es el modelo de riesgo proporcional semi-paramétrico de Cox (Cox 1972), el cual es idéntico al modelo de riesgo proporcional antes mencionado, sin embargo, existe una diferencia importante, ya que el modelo de Cox, no supone alguna forma específica para $\lambda(t)$. Cox argumenta que cuando se ajusta un modelo de riesgo proporcional, la información acerca de $\lambda(t)$ no es de gran utilidad al estimar los parámetros de interés $\hat{\beta}_j$ (Harrell, 2001).

En la revisión de los modelos de riesgo proporcional, se encontró que debido al método de ajuste, refiriéndose específicamente al método de máxima verosimilitud, tales modelos se ven severamente afectados cuando la matriz de covariables está correlacionada, es decir presenta colinealidad ocasionando inestabilidad en la estimación de los parámetros. Esto es, el Hessiano que se forma mediante la función de log-verosimilitud es inestable ocasionando problemas en la estimación de los parámetros $\hat{\beta}_j$. Por ejemplo, la función de verosimilitud parcial de Cox, debido a la colinealidad, forma una función estacionaria lo cual provoca que al aplicar el método de Newton-Raphson para su optimización, su convergencia sea extremadamente lenta alcanzando soluciones subóptimas.

Además, la colinealidad tiene un impacto considerable en la estimación de los parámetros, lo cual se ve reflejado en la varianza estimada para cada parámetro, es decir el error estándar es demasiado grande, trayendo como consecuencia la probabilidad de cometer error en la inferencia realizada para probar la significancia de las variables en cuestión.

Para el caso de estos modelos, el objetivo principal es proporcionar estabilidad a

los parámetros estimados para que la probabilidad de falla, el riesgo y las conclusiones que se realicen al aplicarlos sean confiables. Sin embargo, para proponer una solución a los problemas mencionados es necesario encontrar la forma de estabilizar la matriz de varianzas y covarianzas con el fin de disminuir el error estándar de la estimación y encontrar parámetros estimados más estables.

Por otro lado, el método de Newton-Raphson converge lentamente y en ocasiones no converge o encuentra soluciones subóptimas debido al problema de colinealidad (Sohn et al., 2009). Para tal problema, se han propuesto algunos métodos adicionales; Gratton et al. (2009) propusieron la utilización de métodos como el quasi-Newton (con línea de búsqueda) y el método no lineal del gradiente conjugado considerando el comportamiento de segundo orden de la función objetivo, para problemas de optimización si restricciones. Gratton y Toint (2009) propusieron un método utilizando la aproximación de subespacios invariantes y además plantearon algunas mejoras para el método quasi-Newton en problemas de optimización sin restricciones. Introdujeron las ecuaciones para eigenvalores aproximados y su utilización en la mejora del algoritmo propuesto; además, consideraron el efecto de la colinealidad y el control de la curvatura. Kim et al., en el 2008, publicaron un algoritmo de nombre gradiente LASSO, el cual es computacionalmente más estable y converge más rápidamente al óptimo global debido a que no requiere la matriz inversa.

Existen otros métodos de optimización utilizados cuando la matriz Hessiano está mal condicionada; por mencionar algunos el método de Newton-Cauchy que utiliza el producto de un multiplicador lagrangeano en la matriz Hessiano (Nazareth et al., 2003), el método de Newton modificado que propone una modificación de la matriz Hessiano mediante una factorización de Cholensky (Bonnans et al., 2006) y el quasi-Newton (Nocedal y Wright, 2006) entre otros.

Además de los antes mencionados, existen otros métodos de optimización como los algoritmos genéticos, algoritmos evolutivos y algoritmos inspirados en la naturaleza, entre otros. Estos métodos, no utilizan la matriz Hessiano para realizar la optimización y por lo

tanto no son afectados por la colinealidad. Sin embargo, como utilizan vectores aleatorios, en ocasiones no convergen a soluciones globales (Ashlock, 2005). Considerando el enfoque mencionado, González et al., en el 2008, realizaron una comparación entre algunos algoritmos evolutivos y el método de Newton-Raphson; utilizados en la optimización de la función de verosimilitud parcial del modelo de riesgo proporcional de Cox. Adicionalmente, González et al. (2009) presentaron un método hibrido de optimización utilizando Newton-Raphson, un algoritmo evolutivo basado en la distribución normal y un perfil de verosimilitud.

Es evidente la importancia del método de optimización para la estimación de los parámetros β_j en el modelo de riesgo proporcional, sin embargo, generalmente se utiliza el método de Newton-Raphson para optimizar la función de log-verosimilitud debido a las propiedades de la matriz Hessiano. Esto es, para realizar la inferencia de los parámetros estimados mediante el método de máxima verosimilitud (que se muestra a detalle en el capítulo IV, sección 4.1.4), se utiliza la matriz de información esperada, que es la matriz Hessiano calculada en el método de Newton-Raphson (Pham, 2006), (Harrell, 2001). Dado que los métodos alternativos de optimización realizan modificaciones a la matriz Hessiano (algunos en cada iteración) y considerando que se utilizará el método de máxima verosimilitud para la estimación de los parámetros debido a la existencia de datos censurados, no es conveniente en este caso, la utilización de los métodos alternativos.

Existen investigaciones relacionadas específicamente con la optimización de la función de log-verosimilitud; Scheike et al., en el 2007 encontraron que los modelos de Breslow (1972) y Efron (1977), realizaban estimaciones sesgadas, y propusieron un método llamado algoritmo EM (expectación-maximización). El algoritmo propuesto conduce a resultados similares al método de Efron, por lo que es una buena opción para realizar análisis con estas características.

Sy et al. (2000) mencionan que algunos datos de falla son tomados de poblaciones en las cuales algunos sujetos son susceptibles y otros no a eventos de interés. La muestra

obtenida contiene típicamente muchos datos censurados por lo cual un análisis de confiabilidad común puede, muchas de las veces no ser el apropiado. En estas situaciones, consideraron utilizar un modelo de tratamientos (*cure model*), el cual fue extendido a la utilización del modelo de Cox. Este modelo utiliza técnicas de máxima verosimilitud para estimar los parámetros y la inversa de la matriz de información observada y calcular los errores estándar del modelo. Se utilizó el método Newton-Raphson para la obtención de los parámetros de manera simultánea, el cual mostró ser muy sensible con distintos valores de inicio y provocó divergencia en el método. Se propone que los parámetros sean obtenidos de manera alternada. Sevcovic et al. (2005) propusieron un método de nombre minmax de 2 fases, para estimar los parámetros de un modelo CIR (Cox, Ingresoll and Ross).

Considerando el efecto de la colinealidad en el modelo de riesgo proporcional de Cox, Xue et al., en el 2007 propusieron generalizar la Regresión Ridge y aplicarla al modelo este modelo. En su trabajo, realizaron un análisis de simulación para probar el estimador, comparándolo con el método de verosimilitud penalizada propuesto por Verweij y Van Houwelingen (1994).

Por lo tanto, si es posible representar el modelo de Cox de una forma lineal como lo propone Xue, es decir como una regresión lineal, es posible aplicar los métodos de diagnóstico de colinealidad y reducir el problema mediante técnicas ya conocidas, además de realizar una generalización para otros modelos.

Por otro lado, Wax (1992) presentó un trabajo acerca de algunos diagnósticos de colinealidad en la estimación del riesgo relativo, es decir herramientas para probar la magnitud y fuente de la colinealidad entre co-variantes en los modelos de regresión de riesgo relativo. El autor muestra como extender la utilización de herramientas como el índice de condición, descomposición de la varianza en proporciones y factores de inflación de la varianza, en modelos de verosimilitud y verosimilitud parcial para modelos de riesgo proporcional.

Debido al impacto que tienen las deficiencias mostradas sobre la estimación del riesgo y tomando en consideración los avances encontrados en el tema, la investigación se enfoca de cierta forma en el análisis y solución de los problemas mencionados, tomando en cuenta que tal estimación es determinante para la aplicación de la Inspección Basada en Riego (RBI) así como la elaboración de programas de inspección, la realización de planes de mantenimiento y prevención de riesgos entre otros, cuando es necesario considerar factores de operación en la estimación de la probabilidad de falla.

El presente documento está estructurado en siete capítulos. En el capítulo dos, se describe el problema, los objetivos, las hipótesis de trabajo y los resultados esperados. En el capítulo tres se describen algunos trabajos relevantes relacionados con el problema planteado, hallazgos y posibles soluciones. El capítulo cuatro incluye las herramientas necesarias para la estimación de la probabilidad de falla, así como también el modelo de riesgo proporcional en el cual se basa la metodología propuesta para la presente disertación. Además, se presentan algunas herramientas de diagnóstico para los efectos de la colinealidad.

En el capítulo cinco se plantea la metodología para dar estabilidad a los parámetros estimados en el modelo de riesgo proporcional cuando existe colinealidad, es decir, la estimación de parámetros más estables en el modelo de riesgo proporcional para el cálculo de probabilidad de falla considerando factores operacionales, aplicado en la estimación del riesgo mediante la metodología RBI. En el capítulo seis se muestra la aplicación y resultados obtenidos en la utilización de la metodología propuesta. Por último, en el capitulo siete se desarrollan las conclusiones de la investigación y comentarios referentes al trabajo futuro.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

El presente capítulo está estructurado para presentar el problema y su entorno, los objetivos generales y específicos, las hipótesis, el enfoque de solución y los resultados esperados; todo esto a través de secciones, para facilitar su seguimiento.

2.1. Descripción del Problema

El riesgo en RBI, es una función de la probabilidad de falla P del sistema en estudio y de las *consecuencias,* C, de su falla (ecuación 1.1). Las consecuencias dependen del escenario de operación, estas se establecen combinando métodos de ingeniería de planta y la experiencia de los expertos. Para mayores referencias al respecto, se remite al lector a la norma API 581 (2008). La probabilidad de falla $P(t)$ está en función del tiempo de vida t (o vida útil) del componente en cuestión, y es parte medular en el cálculo del riesgo. Por lo tanto, estimar esta probabilidad de forma adecuada se torna en tema de investigación. Esto conducirá a la elaboración adecuada de planes de mantenimiento de los sistemas o componentes.

La modelación de tiempos de vida se realiza con los llamados *modelos de tiempo de vida* entre ellos destacan: El modelo Exponencial, Weibull, Log-normal y Gamma. En la estimación del riesgo, es necesario incorporar los efectos bajo los cuales el equipo es operado (medio ambiente operacional como temperatura, factores de desgaste, parámetros de

proceso, etc.); que afectan directamente la confiabilidad del sistema o componente. De no ser así, se tendrá una modelación poco razonable del comportamiento de los componentes y en consecuencia, los planes de mantenimiento serán poco confiables.

El efecto de las condiciones de operación sobre la probabilidad de falla puede incorporarse a los modelos de tiempo de vida a través de covariables. En tal caso los modelos se llaman de regresión. Estos pueden clasificarse como paramétricos o semi-paramétricos, dependiendo de las suposiciones realizadas acerca de la distribución estadística de los datos en estudio (Harrell, 2001). Los modelos paramétricos de regresión considerados en este trabajo son: Exponencial y Weibull mientras que el modelo semi-paramétrico contemplado es el de riesgo proporcional de Cox.

Generalmente, el modelo Weibull (único modelo considerado en el API 581, 2008) representa de forma adecuada este tipo de información, sin embargo, en ocasiones éste no presenta un buen ajuste, por lo que es necesaria la inclusión de modelos que pueden ser más confiables y de mayor utilidad. Además, es necesario incluir la aplicación de herramientas estadísticas que permitan medir la *bondad del ajuste* de los modelos y la *selección* entre ellos.

Los modelos de riesgo proporcional paramétricos y el modelo semi-paramétrico de Cox, son una generalización de un modelo de sobrevivencia en forma de un modelo de regresión del tipo $X\beta$; y es definido mediante la siguiente expresión:

$$\lambda\left(t|X\right) = \lambda(t)\exp(X\beta), \tag{2.1}$$

donde $\lambda(t)$ es la función de riesgo base, $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ es una matriz de covariables (o de diseño) , β es un vector de parámetros de regresión y " | " es el símbolo usual para condicionar; leyéndose entonces "t dado X". Para los modelos paramétricos $\lambda(t)$ es representada por la función de tasa de fallas, lo que para el modelo semi-paramétrico $\lambda(t)$ puede ser completamente desconocida sin afectar la estimación de los coeficientes β del modelo (Harrell, 2001). Para estimar los parámetros del modelo (2.1), Cox (1972) propuso la *función de verosimilitud* (ver capítulo IV, sección 4.3) definida como:

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\exp\left(\beta^T X_{(j)}\right)}{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T X_i\right)}, \tag{2.2}$$

mientras que su logaritmo, la *función log-verosimilitud,* es:

$$L(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T X_{(j)} - \log \left[\sum\nolimits_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T X_i) \right] \right\} \tag{2.3}$$

Una cantidad considerable de repeticiones en los tiempos de vida crea un problema que requiere ser considerado en la estimación de los coeficientesdel modelo (Delong et al., 1994). Para minimizar el problema Breslow (1974) sugiere la función de log-verosimilitud parcial para datos con pocas repeticiones:

$$L_B(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T \sum\nolimits_{I \in D_j} X_I - d_j \log \left[\sum\nolimits_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T X_i) \right] \right\} \quad , \tag{2.4}$$

y para una muestra con un número considerable de repeticiones Efron (1977) sugiere:

$$L_E(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T \sum\nolimits_{I \in D_j} X_I - \sum_{k=1}^{d_j} \log \left[\sum\nolimits_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T X_i) - (k-1)/d_j \sum_{i \in D_i} \exp(\beta^T X_i) \right] \right\} \tag{2.5}$$

En ambas ecuaciones, N denota la cantidad de los tiempos de falla observados, $I \in D_j$ donde D_j representa el conjunto de todos los individuos que fallaron en un mismo tiempo t_j. Por otro lado, $i \in R_j$ representa el conjunto de riesgo en el tiempo t_j : $R_j = \{i : X_i \geq t_j\}$. Cuando no existen repeticiones, ambas funciones se reducen a la verosimilitud parcial de Cox (ecuación 2.3).

En una revisión detallada, se encontró que los modelos de riesgo proporcional se ven afectados cuando una o más columnas de la matriz de covariables son linealmente dependientes (presenta correlación entre las variables explicativas del modelo), ocasionando inestabilidad en la estimación de los parámetros, a este problema se le conoce como colinealidad. Además, la matriz Hessiano que se forma obteniendo la segunda derivada de

la función de log-verosimilitud, es inestable ocasionando problemas de convergencia en la estimación de los coeficientes $\hat{\beta}_j$.

Por ejemplo, la aproximación de Breslow (ecuación 2.4), alcanza soluciones subóptimas, debido principalmente a la estructura del Hessiano, H, definido en la ecuación (2.6). Los regresores están representados de manera lineal, los cuales al derivar la función de log-verosimilitud, el resultado los sigue conteniendo indistintamente, ocasionando correlación en la estructura debido a los parámetros. Además, si la matriz de variables independientes presenta colinealidad, el problema de inestabilidad de los coeficientes se agrava.

$$H = \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta^2} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\sum_{i \in R_j} \exp(\beta^T X_i) X_i^{\otimes 2}}{\sum_{i \in R_j} \exp(\beta^T X_i)} - \left(\frac{\sum_{i \in R_j} \exp(\beta^T X_i) X_i}{\sum_{i \in R_j} \exp(\beta^T X_i)} \right)^{\otimes 2} \right] \tag{2.6}$$

Debido a la complejidad de la función log-verosimilitud, es necesaria la aplicación de un método numérico para su optimización; en general y en el presente trabajo se utiliza el método de Newton-Raphson (Sun et al., 2006), (Nazareth et al., 2003).

Como se mencionó anteriormente, el Hessiano utilizado por el método de Newton-Raphson para optimizar la función de log-verosimilitud presenta inestabilidad debido a problemas de colinealidad. Por consecuencia, la función tiende a formar valles en la zona del óptimo (Figura 2.1), ocasionando la existencia de múltiples valores para el vector de parámetros, que estiman el mismo punto óptimo, por lo que la elección de los coeficientes, en estos casos será subóptima.

Al Hessiano H, se le conoce también como la matriz de información de Fisher cuya inversa H^{-1}, es la matriz de varianzas y covarianzas de los parámetros estimados. Entonces, haciendo uso de esta matriz, transformada a una matriz de correlaciones, es posible observar que las relaciones lineales entre las columnas, afectan la estimación de los coeficientes, sus intervalos de confianza y sus pruebas de hipótesis. Así por ejemplo, una matriz de $(2x2)$, será $H_{corr} = \begin{bmatrix} 1 & r_{21} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix}$, donde (r_{12}) es la correlación entre las variables (X_1, X_2). Si las variables (X_1, X_2) no están correlacionadas (ortogonales entre si), entonces $r_{21} = r_{12} = 0$, por lo que $H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector $\hat{\beta}$ será estimado por

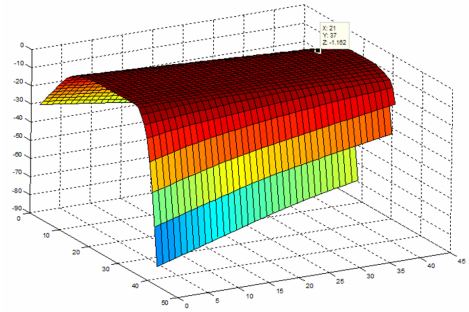

Figura 2.1: Función de Log-Verosimilitud

$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ donde $\hat{\beta}_1 = [g_1]$ y $\hat{\beta}_2 = [g_2]$.

Por otro lado, la inversa del Hessiano en forma de correlación, H^{-1}_{corr},

$$H^{-1}_{corr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-R^2_{12})} & \frac{r_{12}}{(1-R^2_{12})} \\ \frac{r_{12}}{(1-R^2_{12})} & \frac{1}{(1-R^2_{12})} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

donde R^2_{12} es el coeficiente de determinación múltiple entre la variable X_j y las demás $(p-1)$ variables de X, lo cual implica que a medida que la colinealidad crece, ($\mathrm{r}_{12} \to 1$), los elementos de la diagonal principal tienden a infinito y los elementos fuera de la diagonal principal tienden a $\pm\infty$ dependiendo del signo de r_{ij}. Por lo que el componente $\hat{\beta}_j$ estimado por el método de Newton-Raphson bajo estas condiciones, tendrá un valor sobre estimado proporcional a la combinación lineal correspondiente al valor de los elementos de H^{-1}.

Suponga por ejemplo que r_{12} =0.98, representa la correlación positiva entre las variables (X_1, X_2), por lo que $H^{-1}_{corr} = \begin{bmatrix} 25.2525 & -24.7474 \\ -24.7474 & 25.2525 \end{bmatrix}$ y los coeficientes estimados para este caso $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 25.2525 & -24.7474 \\ -24.7474 & 25.2525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, son $\hat{\beta}_1 = [25.2525g_1 - 24.7474g_2]$ para el caso del primer parámetro y $\hat{\beta}_2 = [-24.7474g_1 + 25.25254g_2]$ respectivamente. Note que la diagonal de H^{-1}_{corr} contiene el valor de inflación de la varianza (VIF) para cada parámetro, (el término VIF, se explica a detalle en el capítulo IV, sección 4.5)

De lo anterior, se observa que los coeficientes están sobre estimados y que además representan el efecto de la combinación lineal de las variables (X_1, X_2) sobre el gradiente.

Cuando se trabaja con la matriz de correlación (como es este el caso), el valor esperado óptimo del elemento diagonal de la inversa es 1, así la diferencia de 1 al VIF, es lo que sobre estima al coeficiente.

El gradiente y la relación lineal entre las columnas del Hessiano juegan un papel determinante en la estimación de los parámetros, por lo que al evaluar la significancia de los coeficientes estimados se debe considerar el gradiente como lo establecen Mela et al. (2002).

Para percibir la inestabilidad en la estimación de los coeficientes, se analiza la varianza de $\hat{\beta}$, la cual es estimada por $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 H^{-1}$ (o alternativamente por $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} 1/\lambda_j$) donde λ_j es el $j-$é$simo$ eigenvalor, que representa la proyección de los vectores fila,X_i de H sobre el eigenvector v_j asociado a λ_j. Si existe colinealidad, λ_j tenderá a cero. Por tal razón, la varianza del vector $\hat{\beta}$, $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} 1/\lambda_j \to \infty$ por lo que su valor esperado estará muy lejos del vector verdadero β debido a que $E(\hat{\beta}^T\hat{\beta}) = \beta^T\beta + \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} 1/\lambda_j = \beta^T\beta + \infty$. Observe que para este caso la prueba de Wald, basada en el estadístico $W = \hat{\beta}/\sum_{j=1}^{p} 1/\lambda_j$ como lo mencionan Hauck et al. (1977), tiende a cero.

Para el ejemplo anterior, $\lambda_1 = 1.98$ y $\lambda_2 = 0.02$, por lo que el vector de coeficientes estimados será $\sigma^2(1/1.98 + 1/0.02) = 50.50\sigma^2$, mayor que el valor verdadero. Este incremento de $50.50\sigma^2$ en la varianza de la estimación de $\hat{\beta}$, produce inestabilidad en los coeficientes estimados de tal manera que para diferentes muestras, los coeficientes estimados pueden *cambiar de signo* (Montgomery et al., 2006). Un cambio de signo en los coeficientes estimados para los modelos de riesgo proporcional, tiene un fuerte impacto, ya que estos modelos, toman los coeficientes estimados como insumo para asignar el riesgo debido a una covariable.

Como se mostró, los modelos de riesgo proporcional no son robustos ante problemas de colinealidad. Para ilustrarlo, en la Tabla 2.1 se muestra una matriz de datos experimentales que presentan problemas de colinealidad (Montgomery et al., 2006); con estos datos se

ajustó el modelo de riesgo proporcional de Cox mediante la ecuación (2.3).

Tabla 2.1: Datos experimentales

Factores			Respuesta	
X1	X2	X3	Tiempo	Censura
1300	7.50	0.012	49.00	1
1300	9.00	0.012	50.20	1
1300	11.00	0.012	50.50	1
1300	13.50	0.013	48.50	1
1300	17.00	0.014	47.50	1
1300	23.00	0.012	44.50	1
1200	5.30	0.040	28.00	1
1200	7.50	0.038	31.50	1
1200	11.00	0.032	34.50	1
1200	13.50	0.026	35.00	1
1200	17.00	0.034	38.00	1
1200	23.00	0.041	38.50	1
1100	5.30	0.084	15.00	1
1100	7.50	0.098	17.00	1
1100	11.00	0.092	20.50	1
1100	17.00	0.086	29.50	1

Una forma para determinar si la matriz de datos contiene colinealidad, es mediante el análisis del eigensistema, es decir estimando el número de condición k_c de la matriz de covarianza (Montgomery et al., 2006), el cual se obtiene mediante:

$$k_c = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{2.8}$$

donde, λ_{max} representa el eigenvalor mayor y λ_{min} el eigenvalor menor.

La matriz de información estimada $H^{-1}(\beta)$, para los datos de la Tabla 2.1, es

$$H^{-1}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 0.0296 & -0.0978 & 28.843 \\ -0.0978 & 0.5076 & -24.089 \\ 28.843 & -24.089 & 69018 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Los eigenvalores para esta matriz son $[473.69,\ 1.9426,\ 1.44e-005]$, y el número de condición es $k_c = 3.27e+007$. Siendo que es mayor que el recomendado de 100 (Montgomery et al., 2006), entonces se concluye que existen fuertes problemas de colinealidad.

Además, la matriz de correlación y su inversa son:

$$H_{corr}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9362 & -0.8993 \\ 0.9362 & 1 & -0.8163 \\ -0.8993 & -0.8163 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$H_{corr}^{-1}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 6896.6 & -1724.2 & 5172.5 \\ -1724.2 & 1567.7 & -157.03 \\ 5172.5 & -157.03 & 5016 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Los elementos sobre la diagonal de la matriz de información estimada $H^{-1}(\hat{\beta})$, son los errores estándar de los coeficientes estimados. Ahora, si observamos los valores (VIF) en la diagonal de la inversa de la matriz de correlación, lo recomendado es un valor entre 1 y 10 (Montgomery et al., 2006), entonces al observar que los valores sobrepasan el limite superior, se concluye que el proceso de estimación se ve afectado, debido a la colinealidad inherente al Hessiano.

Obsérvese, además, que debido a la magnitud de los elementos en la diagonal, el estadístico de Wald tiende a ser cero afectando por consecuencia el valor de la significancia de la prueba para el coeficiente. En particular, para el coeficiente $\hat{\beta}_3$, el estadístico calculado es $W_3 = \frac{-2.2465}{\sqrt{69018}}$ = -0.0085512.

Con esta breve discusión, se plantea que las conclusiones a las que llegamos utilizando los modelos de riesgo proporcional pueden ser incorrectas. Esto sugiere la necesidad de realizar investigación para eliminar o disminuir los efectos que la colinealidad inherente que el Hessiano tiene sobre los coeficientes estimados, sus pruebas de hipótesis y la probabilidad de falla estimada. Por consecuencia, cualquier programa de inspección que se desarrolle basado en el riesgo calculado, tendrá mayor certeza estadística.

Conforme a la discusión anterior, surgen las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo asegurar que los $\hat{\beta}_j$ estimados no presentan inestabilidad debido a la colinealidad? ¿Como asegurar que la estimación de los parámetros es adecuada y similarmente, la probabilidad de falla estimada en un modelo de riesgo proporcional?

¿Como estabilizar la matriz Hessiano para que la varianza disminuya y aumente la estabilidad de los parámetros estimados? ¿Con la estabilidad de los parámetros se obtendrán

mayor certeza estadística en la probabilidad de falla estimada? ¿Es posible generalizar el método de estimación para los otros modelos utilizados en la estimación de probabilidad incluyendo covariables?

En los modelos de regresión lineal múltiple se utiliza la Regresión Ridge (Montgomery et al., 2006) como estrategia para la estimación de los parámetros en presencia colinealidad, debido a que, tal problema conduce a una estimación menor de los cuadrados medios del error con respecto a la estimación por máxima verosimilitud (Piña, 2005), lo cual representa una posibilidad para la solución del problema planteado.

Xue et al., en el 2007, estudió el impacto que la colinealidad tiene sobre el modelo de Cox, y propuso una adaptación del método de Regresión Ridge, mostrando en su investigación que la función de verosimilitud parcial (ecuación 2.2) es equivalente a la función de verosimilitud de n realizaciones de variables aleatorias independientes Poisson Y_{ij}, donde $Y_{i0} = 1$ y $Y_{ij} = 0$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m_i$; para esto el valor esperado de Y_{ij} es:

$$E\left[Y_{ij}\right] = P_{ij} = \frac{\rho\left(\beta, x_{ij}\right)}{\sum_{l=0}^{m_i} \rho\left(\beta, x_{il}\right)} \quad para\ j = 0, 1, ..., m_i \tag{2.12}$$

Lustbader (1986) demostró que un modelo de regresión de Poisson puede ser reformulado como un modelo de regresión lineal:

$$U = D\beta + \varepsilon, \tag{2.13}$$

donde D representa la matriz de diseño, β el vector de parámetros del modelo a estimar y ε un error aleatorio. Las hileras de la matriz de diseño D (D tiene la dimensión $\sum (m_i + 1) \cdot p$) tienen la forma:

$$\sqrt{P_{ij}}\left(k_{ij} - \bar{k}_i\right), \tag{2.14}$$

donde $k_{ij} = \partial \log p(\beta, x_{ij})/\partial(\beta)$ y $\bar{k}_i = \sum_{l=0}^{mi} P_{il} k_{ij}$. Bajo un modelo log-lineal de riesgo relativo $k_{ij} = x_{ij}$. La matriz de diseño D es equivalente a la matriz de covarianza en la regresión lineal, excepto que utiliza la distancia de k_{ij} a la media del riesgo $\bar{k}_i$. Tal distancia, es conocida como la distancia euclidiana; sin embargo en presencia de colinealidad,

la distancia calculada no es del todo confiable. Los elementos del término residual son:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{y_{ij} - P_{ij}}{\sqrt{P_{ij}}} \quad para\ j = 0, 1, ..., m_i;\ i = 1, ..., n \tag{2.15}$$

De la formulación del modelo lineal presentado en la ecuación (2.13), por mínimos cuadrados se puede obtener el estimador lineal de β:

$$\hat{\beta} = (\hat{D}^T \hat{D})^{-1} \hat{D}^T \hat{U} \tag{2.16}$$

Por consecuencia el estimador del modelo lineal de Regresión Ridge es:

$$\hat{\beta}_R = (\hat{D}^T \hat{D} + kI)^{-1} \hat{D}^T \hat{D} \hat{\beta} \quad , \tag{2.17}$$

donde k es una constante que requiere ser estimada y $(\hat{D}^T \hat{D})$ es la matriz de información estimada para el modelo de Cox.

El modelo presentado por Xue, se realizó bajo el supuesto de que no existen datos censurados y repeticiones en la muestra de tiempos de falla, por lo que representa una desventaja. Además, se observa que construye una matriz de diseño supuesta D (donde $\hat{D}^T D = H(\hat{\beta})$) para realizar la estimación por mínimos cuadrados, lo que sugiere distintas posibilidades para proponer la solución.

Debido al impacto que tienen las deficiencias mostradas sobre la estimación de la probabilidad de falla, la presente investigación se enfoca principalmente en el análisis y solución de los problemas mencionados resaltando la importancia de tal estimación sobre el calculo del riesgo en la aplicación de la Inspección Basada en Riesgo (API RBI 581, 2008).

2.2. Hipótesis

A continuación se presentan las hipótesis necesarias para el desarrollo de la presente disertación, las cuales deberán ser demostradas mediante el desarrollo y aplicación de la metodología propuesta.

2.2.1. Hipótesis General

La utilización de los fundamentos del modelo de Regresión Ridge adaptados al modelo de riesgo proporcional, para tiempos de falla con censura y repeticiones, permite obtener parámetros más estables y por consecuencia estimaciones de probabilidad de falla más confiables.

2.2.2. Hipótesis Específicas

1. Es posible a través de un modelo generalizado identificar y minimizar el problema de colinealidad en los modelos de riesgo proporcional tanto en el caso paramétrico como en el semi-paramétrico.

2. Es posible obtener estimaciones de los coeficientes del modelo de regresión, más estables que los estimados mediante el método de Newton-Raphson, sin reconstruir la matriz de diseño.

3. Es posible incorporar el efecto que el gradiente tiene sobre la estimación de los coeficientes de regresión y sus pruebas de hipótesis cuando se aplican los modelos no lineales.

4. Es posible que la obtención de parámetros más estables tenga efecto en el estadístico Wald que se usa para realizar la inferencia de los coeficientes en los modelos de regresión no lineales, es decir, que el estadístico refleje el efecto que el gradiente tiene sobre los coeficientes estimados.

2.3. Objetivos

Para la disertación se plantean los siguientes objetivos, que definen los propósitos específicos de la presente investigación.

2.3.1. Objetivo General

Generar una metodología estadísticamente confiable para incorporar los efectos que el medio ambiente operacional tiene sobre la estimación de la probabilidad de falla y a su vez del riesgo utilizado para la gestión de mantenimiento basado en la metodología RBI.

2.3.2. Objetivos Específicos

1. Establecer criterios para la realización de un *modelo de análisis* que nos permita estimar: confiabilidad de un componente, probabilidad de falla, tasa de falla y vida media o remanente, para el desarrollo de planes de mantenimiento basados en RBI.

2. Dar estabilidad y confianza estadística a los coeficientes estimados para los modelos de riesgo proporcional ajustados a datos de tiempos de vida de un producto o sistema, a través de eliminar (o minimizar) los efectos de la colinealidad inherente a la estructura del Hessiano, para incrementar por consecuencia la certeza estadística en la estimación de la probabilidad de falla P_i y el riesgo estimado en RBI.

3. Encontrar la forma de mejorar la matriz de covarianzas para disminuir el problema de colinealidad y por consecuencia dar estabilidad a los parámetros estimados, además de disminuir la varianza de la estimación.

4. Dar estabilidad a los parámetros $\hat{\beta}_j$ para que el riesgo estimado y las conclusiones que se realicen al aplicar la metodología sean confiables.

2.4. Justificación

COMIMSA, en su Gerencia Región Sur y Gerencia Región Marina realiza análisis de riesgo en plantas de procesos petroquímicos con el propósito de asegurar que:

- Las plantas operen exitosamente.

- Optimicen el uso de sus recursos.
- Mejoren el rendimiento de los activos de la instalación.

La gerencia realiza estos estudios basados en la metodología de Inspección Basada en Riesgo (RBI) haciendo uso de normas tales como el API-581, para calcular el riesgo con el cual se realizan los planes de mantenimiento.

Por lo tanto, dado que el riesgo es una función de la consecuencia de la falla C y su probabilidad de falla P, la gerencia necesita que la probabilidad de falla sea estimada de forma correcta y confiable para que sus análisis tengan un soporte estadístico razonable.

El plan de mantenimiento que se realiza actualmente está basado en la experiencia del encargado y en las especificaciones de diseño de los componentes, presentándose dos posibles casos:

1. El componente presenta falla después del tiempo especificado por el fabricante. Esto tiene por consecuencia un sobre mantenimiento e implica un costo (por inspección). Por ejemplo, si se planea que el componente fallará en 5 meses y el componente falla en 10 meses, se realiza un 50 % más del mantenimiento. La causa general es que el componente opera en condiciones menos severas que las establecidas por el fabricante en el laboratorio. Considerando que el laboratorio no es específicamente el contexto operacional, entonces existen factores operacionales que están afectando directamente la probabilidad de falla, los cuales deben ser considerados en su estimación.

2. El componente presenta falla antes del tiempo especificado por el fabricante. En este caso, hay que revisar si el componente es de alto riesgo y sus posibles consecuencias. Además, es necesario realizar un análisis profundo para determinar que factores operacionales están influyendo en su probabilidad de falla (procedimiento, materiales o capacitación).

En ambos casos, es necesario, sin comprometer la integridad del componente o equipo, reestablecer la frecuencia de mantenimiento basándose en el riesgo establecido para cada caso y, si es necesario realizar un re-acondicionamiento, una sustitución o el rediseño correspondiente. Dado lo anterior, es evidente que las necesidades de la gerencia son:

1. Determinación y caracterización del tipo de datos (tiempos de falla y datos censurados).

2. Considerando que el API-581 utiliza solo el modelo Weibull, se requieren las herramientas necesarias para estimar probabilidad de falla, vida remanente y tasa de fallas entre otros indicadores, para tal modelo utilizando solo tiempos de vida.

3. En caso de que el modelo Weibull considerando en el API 581 no sea adecuado, es necesario la realización de una selección del modelo que mejor describa los datos de tiempo de vida (Exponencial, Gamma, Weibull y Log-Normal) para la estimación de probabilidad de falla, vida remanente y tasa de fallas, sin considerar factores operacionales.

4. Adicionalmente, es necesario un modelo para estimar la probabilidad de falla, vida remanente y tasa de fallas (entre otros indicadores), considerando tiempos de vida y factores operacionales.

La presente investigación se centra principalmente en el punto número cuatro referente a los modelos de riesgo proporcional, específicamente en obtener parámetros estimados más estables, con el fin de proporcionar soporte estadístico a la estimación de la probabilidad de falla y, por consecuencia, al riesgo calculado para la aplicación de la metodología RBI. Sin embargo, los puntos 1-3, también se desarrollarán de manera adicional como entregable para uso de la gerencia.

Capítulo 3

Revisión Bibliográfica

En este capítulo se presenta el estado del arte referente al enfoque de incluir en un modelo, los factores operacionales que influyen en la estimación de la probabilidad de falla, la estimación de sus parámetros en presencia de colinealidad y los métodos de diagnóstico del problema, además de su utilización y principales desarrollos, para estabilizar sus parámetros estimados y por consecuencia mejorar la confianza de la probabilidad de falla estimada.

3.1. Antecedentes

En el proceso de revisión de trabajos relevantes relacionados con la estimación de confiabilidad considerando variables operacionales, se observó que la mayoría de las aplicaciones se han desarrollado en el campo de la medicina como lo muestran Molinero (2001), Liu et al. (2009), Corpas y Lara (2009), Laubender y Bender (2009), Kreike et al. (2010) entre otros.

Por otro lado, en este proceso inicial de revisión, se realizaron algunos trabajos aplicados a modelos de degradación. En el campo de los recubrimientos poliméricos expuestos en ambiente ácidos, se obtuvieron datos de pruebas de vida acelerada con los cuales se comparó la resistencia de un recubrimiento polimérico añadiéndole un sello vinilester, contra otro recubrimiento de la misma naturaleza sin añadir el sello vinilester (González

et al., 2008). Para realizar el modelo de extrapolación se utilizaron polinomios ajustados mediante el método de mínimos cuadrados, ajustando además un modelo Weibull para determinar la confiabilidad de componente; los resultados mostraron la superioridad del recubrimiento polimérico añadiéndole un sello vinilester (ver apéndice II).

Adicionalmente, se presentó la aplicación de un modelo para la estimación de confiabilidad utilizando el modelo de probabilidad Weibull, modelando el parámetro de escala de la forma $\alpha(x)$ (González et al., 2008). En este trabajo, se utilizó el método de mínimos cuadrados para obtener los tiempos de falla estimados. Se realizó la aplicación del modelo Weibull para estimar la confiabilidad, utilizando los datos publicados por Withmore et al. (1997), referentes a la resistencia de cables de conducción eléctrica en altas temperaturas (ver apéndice II).

Como ya se mencionó, la mayoría de las aplicaciones relacionadas con el concepto de incluir los factores operacionales en la estimación de confiabilidad, específicamente en los modelos de riesgo proporcional, se han desarrollado en el campo de la medicina, sin embargo, la interrogante es si existe alguna aplicación industrial de este tipo de modelos ya que la investigación realizada se enfoca al campo de la ingeniería industrial.

Piña et al., en el 2005, realizó una revisión del modelo propuesto por Taraman en 1974, el cual se enfoca en la modelación de la vida útil de una herramienta, es decir la duración de tiempo que la herramienta mantiene una calidad aceptable de funcionamiento, tomando dos aspectos importantes: el ambiente operacional y el desgaste presentado por edad.

Taraman (1974) llevó a cabo un experimento diseñado para estimar los parámetros de un modelo empírico; Balakrishnan y DeVries (1985), extendieron el análisis de Taraman, para permitir la actualización secuencial de parámetros estimados y la inclusión de información previa en el procedimiento de estimación. Mazzuchi y Soyer (1989), notaron que el modelo empírico propuesto por Taraman, tomaba en cuenta el efecto del ambiente operacional de la máquina pero fallaba en considerar la edad (o características de desgaste de la

herramienta). Para considerar tanto el ambiente operacional como la edad fue propuesto un modelo de riesgo proporcional utilizado para evaluar la vida de la herramienta.

En la primera parte, se toma la función de riesgo λ_0, (conocida en la literatura como riego base), para modelar la duración (tiempo de vida) de la herramienta. En la segunda parte, el modelo representa el ambiente operacional a través de los coeficientes de regresión de un modelo polinomial y la matriz de covarianzas. Sin embargo, la matriz de covarianzas formada por los factores operacionales que determinan la vida de la herramienta, ocasiona que los coeficientes estimados sean inestables (grandes y con intervalos de confianza demasiado amplios). Por tal motivo, los autores utilizaron el método de Regresión Ridge para minimizar el efecto de la matriz de covarianzas sobre los parámetros estimados.

Scheike et al., en el 2007 encontró que los modelos existentes de aproximación al método de Cox, específicamente el caso de Breslow (1972) y Efron (1977), encontraban estimaciones sesgadas, por esta razón propusieron un método llamado algoritmo EM (expectación-maximización), en el cual se propone una ecuación de calificación (*score equation*) que se utiliza para obtener los parámetros β_j, realizando su solución mediante Newton-Raphson. El autor realizó una comparación entre los métodos existentes y el método propuesto, haciendo énfasis en la importancia del análisis de datos de falla con repeticiones. Mediante la simulación realizada para la comparación de los métodos, se demostró que la aproximación de Efron es la mejor elección para el análisis de fallas con repeticiones, mencionando también que la aproximación de Breslow funciona mejor si los covariantes siguen una distribución uniforme o binaria. Por otro lado, el algoritmo EM en todos los casos conduce a resultados similares al método de Efron, por lo que es una buena opción para realizar análisis con estas características.

Sy et al., en el 2000, menciona que algunos datos de falla son tomados de poblaciones en las cuales algunos sujetos son susceptibles y otros no a eventos de interés. La muestra obtenida contiene típicamente un gran porcentaje (80 %) de datos censurados por lo cual un análisis de confiabilidad común puede muchas de las veces no ser el apropiado, en estas

situaciones puede ser utilizado el *modelo de corrección* (cure model) que fue extendido a la utilización del modelo de Cox.

Este modelo emplea técnicas de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de regresión y la incidencia de manera simultanea $L_c(b, \beta, \Lambda_0; y)$. Además, se propone la utilización de una forma no paramétrica de verosimilitud para el algoritmo EM, estimando los errores estándar del modelo mediante la inversa de la matriz de información observada. Para realizar la optimización de la función L_c, se utilizó el método Newton-Raphson, método que se mostró altamente sensible a los valores iniciales (semilla), ocasionando que el algoritmo no lograra converger. Sy menciona que el método más eficiente fue el de Newton-Raphson de dos pasos propuesto por Prentice y Gloecker (1978) donde los parámetros son obtenidos de manera alternada.

Se puede concluir que los parámetros juegan un papel importante en los modelos de riesgo proporcional, sin embargo se ha encontrado que, por lo general, se utiliza el método de Newton-Raphson para optimizar la función de verosimilitud parcial (dado que proporciona la matriz de información estimada). Esto puede tener algunos inconvenientes, por ésta razón se realizó una revisión amplia de trabajos relacionados con la optimización de funciones.

Sohn et al. (2009) menciona que el método de Newton-Raphson converge lentamente y en ocasiones no converge o encuentra soluciones subóptimas debido a que la matriz Hessiano se ve afectada por el problema de colinealidad. Dado lo anterior, Gratton y Toint (2009) propusieron un método utilizando la aproximación de subespacios invariantes e Introdujeron ecuaciones aproximadas para eigenvalores, las cuales fueron utilizadas para mejorar el método de optimización sin restricciones quasi-Newton. Adicionalmente, consideraron el efecto de la colinealidad y el control de la curvatura; para esto, mostraron que utilizando el conocimiento a priori de los espacios invariantes aproximados asociados con la matriz Hessiano, induce a una utilización de la información más eficiente y por consecuencia a la obtención de mejores algoritmos de optimización.

Kim et al., en el 2008, publicó un algoritmo de nombre gradiente LASSO por sus siglas en inglés (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator), el cual es computacionalmente más estable y converge con mayor rapidez al óptimo global debido a un paso de eliminación incluido en el algoritmo, además de no requerir la matriz Hessiano inversa para realizar la optimización. El autor menciona que se han realizado aplicaciones del algoritmo propuesto en análisis de confiabilidad.

Sevcovic et al. (2005) propuso un método de nombre minmax de 2 fases, para estimar los parámetros del modelo CIR (por Cox, Ingresoll and Ross) de una tasa de interés. En la primera parte de la optimización se determinaron cuatro parámetros CIR mediante la minimización de la suma de cuadrados de las diferencias de una curva teórica de proceso CIR y la curva del mercado real, es decir la minimización de la suma de cuadrados de las diferencias entre la curva de la tasa de interés del mercado real y la predicción mediante CIR, para lo cual se propuso una función de costo U y obteniendo un mínimo global. Este trabajo introduce el concepto de función de verosimilitud restringida. Para tal aproximación se realizó la optimización del logaritmo de una función formada por tres parámetros donde la función de costo U (transformada en 3 variables) alcanza el mínimo global.

Con respecto al método de optimización, el autor menciona que existen métodos estándar ó técnicas de optimización para la obtención del mínimo global, como el método del gradiente de Newton-Kantorovich sin embargo estos métodos convergen hacia un mínimo local, además de tener una convergencia lenta para encontrar un mínimo global. Sevcovic utilizó un método de optimización basado en una variante de un algoritmo de estrategia evolutiva. En cada paso de la optimización, la aproximación del mínimo global obtenido mediante el algoritmo evolutivo, es mejorada por un corrector que consiste en la aplicación del método del gradiente de Newton- Kantorovich. Este método se aplica después de haber generado el vector de selección de la nueva generación, en el cual cada vector (padre) intermedio, es mejorado mediante m pasos del método del gradiente de Newton-

Kantorovich, obteniendo un nuevo vector de padres mejorado.

Es evidente la importancia de la estimación de los parámetros del modelo en cuestión, debido a que tener soluciones subóptimas afecta en los resultados esperados. Específicamente en el modelo de riesgo proporcional y especialmente en el modelo de Cox, tener soluciones subóptimas afecta de gran manera, dado que para estimar la tasa de fallas, así como la probabilidad de falla, estos modelos toman como insumo los parámetros estimados, induciendo por consecuencia, a conclusiones erróneas.

Considerando lo anterior, se realizó (Gonzalez et al., 2008) un trabajo relacionado con la estimación de los parámetros del modelo de Cox utilizando diferentes estratégicas de optimización. Utilizando los datos publicados por Soyer y Mazzuchi (1989), se comparó la eficiencia entre el método Newton-Raphson, un Algoritmo Genético y un Algoritmo Evolutivo tipo EDA de nombre EvoNorm, para estimar los parámetros del modelo obteniendo que en el caso, donde los datos no contienen un problema severo de colinealidad, las estimaciones de los parámetros mediante las tres estrategias obtienen resultados muy similares.

Por otro lado, utilizando datos donde se presentan problemas de colinealidad, se ajustó el modelo de Cox y se realizó la comparación entre los métodos mencionados. Los resultados obtenidos, muestran que el método de Newton-Raphson encuentra soluciones subóptimas, con respecto a los modelos de búsqueda global, debido al problema de colinealidad. Cabe mencionar que los mejores valores de optimización los encontró el algoritmo EvoNorm, el cual supone que los parámetros se distribuyen de forma normal y genera para la búsqueda del vector de parámetros óptimo, datos aleatorios con distribución normal (apéndice II).

Mediante la revisión y el trabajo realizado, fue posible proponer algunas alternativas para el problema de estimar soluciones subóptimas, dado que el método de Newton-Raphson converge lentamente. Con respecto a esto, se propuso un método de optimización hibrido basado en Newton-Raphson y EvoNorm, para optimizar la función de verosimili-

tud parcial en presencia del problema de colinealidad (Gonzalez et al., 2009).

Considerando que el algoritmo evolutivo requiere la especificación del dominio o rango en el cual se encuentra el valor de los parámetros a estimar, lo cual, para el modelo de Cox es difícil de establecer, se propuso realizar intervalos de confianza para los parámetros estimados utilizando la matriz de información estimada mediante el método de Newton-Raphson. Una vez obtenida tal información, se aplicó el algoritmo evolutivo, restringiendo el o los parámetros que contengan intervalos de confianza amplios debido a la varianza grande, mediante perfiles de verosimilitud.

En base al trabajo desarrollado, se concluyó que mediante el método propuesto, se obtienen mejores valores de optimización que los obtenidos utilizando los métodos de forma independiente. Notando que en uno de los casos, hay parámetros que van de positivo a negativo debido al problema de colinealidad (para detalles ver apéndice II).

En la revisión anterior, observamos que existen trabajos con la utilización del modelo de riesgo proporcional en diferentes aplicaciones, incluyendo métodos de obtención de sus parámetros. Ahora, con respecto al efecto de la colinealidad en los modelos de riesgo proporcional, se revisaron algunas investigaciones.

Con el fin de controlar la inestabilidad en la estimación de los parámetros $\hat{\beta}_j$, en la regresión lineal y regresión logística, se ha utilizado el modelo de Regresión Ridge como alternativa para la estimación de máxima verosimilitud en presencia de colinealidad. Xue et al., en el 2007, propuso generalizar la Regresión Ridge y aplicarla al modelo de riesgo proporcional de Cox. En la investigación, muestra el impacto que la colinealidad tiene sobre éste modelo (lo también cual sucede en algunos otros modelos de interés). Además, como ya se mencionó, propuso la formulación del modelo de Cox de manera lineal (ver capitulo II, sección 2.1, ecuación 2.13), obteniendo el estimador lineal de mínimos cuadrados:

$$\hat{\beta} = (\hat{D}^T \hat{D})^{-1} \hat{D}^T \hat{U}, \tag{3.1}$$

y por consecuencia, el estimador del modelo de Regresión Ridge:

$$\hat{\beta}^R = (\hat{D}^T\hat{D} + kI)^{-1}\hat{D}^T\hat{D}\hat{\beta}, \tag{3.2}$$

donde k es una constante que requiere ser estimada y $\hat{D}^T D$ es la matriz de información estimada para el modelo de Cox.

Adicionalmente, Xue demostró que la colinealidad presentada en la matriz de diseño X induce a estimaciones inestables de los efectos de las covariables, es decir los efectos pueden ser enmascarados representando con esto un problema serio. Y afirmó que, una categorización de las variables puede reducir la correlación entre variables, sin embargo, produce una pérdida de eficiencia. Para probar el estimador, el autor realizó un análisis de simulación, haciendo una comparación entre el método de verosimilitud penalizada propuesto por Verweij y Van Houwelingen (1994) y el método propuesto.

Cabe destacar que el modelo presentado por Xue representa una de las alternativas para eliminar el efecto de la colinealidad; sobre tales propuestas, se realizaron algunas observaciones:

1. Reconstruir la matriz de covarianzas utilizando la distancia euclidiana, no es la mejor opción para estimar éste escalar cuando existen problemas de colinealidad (Piña et al., 2005), (Mela et al., 2002).

2. No proporcionar un método para estimar k en forma determinista, por lo que sus estimaciones son sesgadas al depender estas de la varianza y los coeficientes estimados.

3. Su método solo está estructurado para la modelación de datos completos. Es decir, no es capaz de modelar sistemas que presenten datos censurados y/o con repeticiones.

Además de las observaciones anteriores, cabe mencionar que se pierde información

importante en la construcción de la matriz de diseño D, considerando que $\hat{D}^T D$ es la matriz de información estimada.

Por otro lado, el estimador de Regresión Ridge no es una solución para el análisis de dimensión de datos, es decir para la reducción de variables no significativas en algún modelo, en ese caso se utilizan otros métodos como el análisis factorial o componentes principales, como es el caso de Li y Gui (2004) que presentaron la utilización de un análisis de regresión parcial de Cox para la reducción dimensional de un micro-arreglo de expresión genética, para pronosticar la sobrevivencia de pacientes futuros.

Inan y Tez (2008), consideran que la estimación realizada mediante el método de máxima verosimilitud en el modelo de riesgo proporcional de Cox, generalmente produce estimaciones con errores grandes cuando existen problemas de colinealidad. Consideran que la estimación de Ridge tiene como ventaja la realización de estimaciones con un error medio moderado. Sin embargo, no elimina totalmente el problema de colinealidad en la matriz Hessiano, para lo cual proponen la aplicación del estimador propuesto por Liu (2003).

Sohn et al. (2009), presentan la aplicación del algoritmo LASSO en el modelo de riesgo proporcional de Cox. Detallan la utilización de tal algoritmo, aplicando el paso adicional de eliminación. El método propuesto resuelve directamente el problema de convergencia en el modelo penalizado de Cox con restricciones. Sin embargo, los métodos propuestos por Park y Hastie (2007) y Goeman (2009), resuelven este mismo problema de optimización sin utilización de restricciones, usando un multiplicador de Lagrange.

En conocimiento de los trabajos revisados referentes al efecto de la colinealidad sobre la estimación de los parámetros del modelo, se propuso un modelo basado en componentes principales para reducir los efectos de la dependencia lineal y obtener parámetros estimados más estables (Gonzalez et al., 2010). Como diagnostico de colinealidad se utilizó el número de condición obtenido de la matriz de información estimada. En la aplicación mostrada, se utilizan solo dos componentes principales (de un total de tres) con los cuales

se obtienen mejores resultados, es decir coeficientes más estables; se redujo la varianza de la estimación de los parámetros e incluso en algunos casos los coeficientes cambiaron de signo, lo cual afectó en el riesgo estimado (para detalles ver apéndice II).

Para aplicar la metodología propuesta es necesario medir los efectos de la colinealidad en la estimación, para lo cual se revisaron algunos trabajos relacionados con el diagnostico de colinealidad. Wax (1992) presentó un trabajo que contemplaba algunos diagnósticos de colinealidad en la estimación del riesgo relativo. Utilizó algunas herramientas para probar la magnitud y fuente de la colinealidad entre covariantes. En su investigación, muestró como extender la utilización de herramientas como el índice de condición, descomposición de la varianza y factores de inflación, en métodos de verosimilitud y verosimilitud parcial.

Lesaffre y Marx (1993), mencionan que si la matriz de covarianzas (o de información para el caso de modelos no lineales), está mal condicionada es recomendable distinguir entre la colinealidad debida a las variables independientes y la colinealidad debida a la dependencia entre los parámetros, a la cual nombran Colinealidad-ML; proponen utilizar el número de condición estandarizado para diagnosticar el problema de colinealidad. En el trabajo desarrollado se determinó que es posible distinguir la causa de la colinealidad comparando los números de condición correspondientes, en particular, si $Kx > 5$, se concluye que la colinealidad es debida a las variables independientes.

Weissfeld (1989), utilizó los índices de condición y descomposición de varianzas en los modelos de riesgo proporcional de Cox, Exponencial, Weibull y Log-normal, en su trabajo analizó el efecto de la colinealidad en los números de condición. Lee y Weissfeld (1996) realizaron el análisis del modelo de Cox en presencia de censura y colinealidad utilizando índices de condición escalados para covariables fijas y covariables dependientes del tiempo. Mackinnon y Puterman (1989) mencionan que el diagnostico para el problema de colinealidad en modelos lineales generalizados debe realizarse utilizando la matriz de información. Godínez y Ramírez (2003) analizaron el efecto de la censura y la colinealidad en modelos de regresión exponencial log-lineal, para lo cual utilizaron el índice de condición

escalado y la descomposición de la varianza. Adicionalmente, Bonate (1999) presentó un trabajo donde analiza el efecto de la correlación contenida en la matriz de diseño sobre la habilidad para decidir cuales variables deben ser incluidas en la estructura del modelo; considerando en su estudio modelos no lineales de efectos mixtos. Bonate utilizó la descomposición de la varianza y el índice de condición de la matriz de información, como diagnóstico de colinealidad.

Es evidente que la colinealidad representa un problema para la estimación de parámetros en los modelos de riesgo proporcional y por consecuencia en la probabilidad de falla estimada. Por esta razón, la metodología desarrollada en la presente disertación está orientada a reducir tales efectos con el fin obtener parámetros más estables, considerando que estos parámetros son utilizados como insumo para la estimación de la probabilidad de falla y la tasa de fallas; estimaciones empleadas en la aplicación de la Inspección Basada en Riesgo. La metodología propuesta se muestra en el capítulo 5, incluyendo algunos detalles en el apéndice I.

Capítulo 4

Marco Teórico

En el presente capítulo se mencionan las herramientas estadísticas necesarias para la modelación y obtención de la probabilidad de falla incluyendo covariables así como, el análisis de confiabilidad aplicado a tiempos de falla sin covariables y algunos temas relevantes que se utilizarán en la disertación.

4.1. Confiabilidad

Aún cuando en la actualidad existe una amplia gama de literatura relacionada con el término confiabilidad y las diferentes metodologías para su cuantificación, éste es quizá uno de los conceptos más intuitivos en las diferentes ramas de la ingeniería.

La confiabilidad implica conceptos tanto cualitativos como cuantitativos. Sin embargo el término más cercanamente relacionado con la confiabilidad es la calidad: una no es concebible sin la otra y todo entendimiento cuantitativo de la calidad y la confiabilidad está fundamentado en la probabilidad y la estadística.

Algunas posibles definiciones de confiabilidad son:

1. La confiabilidad es la probabilidad de que un componente o sistema desempeñe su función de diseño sin experimentar una falla, por un período de tiempo específico y bajo condiciones específicas (Nahmias, 1999).

2. La confiabilidad es un concepto de calidad basado en el tiempo. También es la probabilidad de que un producto funcione en forma correcta durante un período dado, en su aplicación prevista (Murthi, 2003).

3. Se puede definir como la capacidad de un producto de realizar su función de la manera prevista. De otra forma, la confiabilidad se puede definir también como la probabilidad de que un producto realizará su función prevista sin incidentes por un período de tiempo especificado y bajo condiciones indicadas (Molinero, 2001).

Según autores como Dodson (1994) y Gertsbak (2000), un análisis de confiabilidad se basa principalmente en los siguientes pasos, los cuales más adelante se explicarán a detalle.

1. Información acerca del componente o sistema que se va a analizar (muestra de tiempos de vida).

2. Pruebas de bondad de ajuste para determinar la distribución de los datos en caso de que se ajusten a alguna distribución.

   a) Paramétrica: Discreta o Continua.

   b) No Paramétrica

3. Paramétrica: Estimación de los parámetros de la distribución que representa adecuadamente el comportamiento de los datos.

4. No Paramétrica: Utilización de modelos no paramétricos.

5. Estimación de los indicadores de confiabilidad

4.1.1. Recolección de Datos (muestreo)

La recolección de datos es una parte importante de cualquier proyecto, debido a que la exactitud de cualquier predicción que se realice, dependerá directamente de la calidad y la

precisión de los datos recolectados. En confiabilidad la muestra puede representar datos de vida o datos de tiempo a falla del sistema o componente del cual se quiere realizar alguna predicción o estimación.

En pruebas de vida de componentes, cuando una muestra de n componentes se pone a prueba, es difícil obtener n observaciones, porque algunos de los componentes en la muestra pueden no fallar durante el período que dure la prueba; o bien esta puede, por alguna razón, detenerse antes de que todas las unidades lleguen a fallar.

Bajo estas circunstancias, cuando se desea realizar un análisis en una etapa intermedia (antes de que se termine la prueba), se obtendrán datos incompletos o censurados. Los datos censurados pueden clasificarse en tres tipos: censurado simple Tipo I, censurado simple Tipo II y censurados por intervalo. Es necesario entender que tipo de datos se tienen para analizarlos correctamente.

- **Censurados por tiempo, Tipo I**

Generalmente hay restricciones sobre la duración de las pruebas de vida u otros estudios de confiabilidad y, como un resultado, los datos deben analizarse antes de que todas las unidades fallen. Remover las unidades sin falla de la prueba en un tiempo preestablecido es conocido como censurado por tiempo o censurado Tipo I. Las unidades pueden probarse simultáneamente o en secuencia (a causa de un número limitado de posiciones de prueba).

- **Censurados por falla, Tipo II**

Una prueba de vida que es concluida después de un número específico de fallas, resulta en censurado por falla, también conocido como censurado Tipo II. Aunque las propiedades estadísticas de los estimados de datos censurados por falla son más simples que las propiedades correspondientes de datos censurados por tiempo, las pruebas censuradas por falla son menos comunes en la práctica.

- **Censurados por intervalo**

En muchas pruebas de vida, las fallas son descubiertas únicamente en los instantes de la inspección. Observaciones censuradas por intervalo consisten de límites superior e inferior sobre un tiempo de falla. Tales datos son también conocidos como datos por inspección, datos agrupados o datos recuperados. Si una unidad ha fallado en su primera inspección, ésta es la misma que una observación censurada a la izquierda. Si una unidad no falla en el momento de la última inspección, ésta se censura a la derecha, el límite superior del intervalo es infinito (Frisco, 1998).

Es importante hacer notar que, si se supone razonable que las unidades fabricadas (sobre el período de tiempo en cuestión) provienen del mismo proceso, los datos pueden mezclarse y analizarse para hacer inferencias acerca de este proceso. Sin embargo, un proceso o diseño del producto cambian con frecuencia a través del tiempo y mezclar tales datos puede conducir a conclusiones incorrectas. El tipo de datos que contenga la muestra, afecta el proceso de estimación, por lo tanto es de importancia clasificar correctamente los datos de acuerdo a su tipo: agrupados, no agrupados, etcétera. En la figura 4.1 se observa de manera general el tipo de datos posibles a obtener en una muestra.

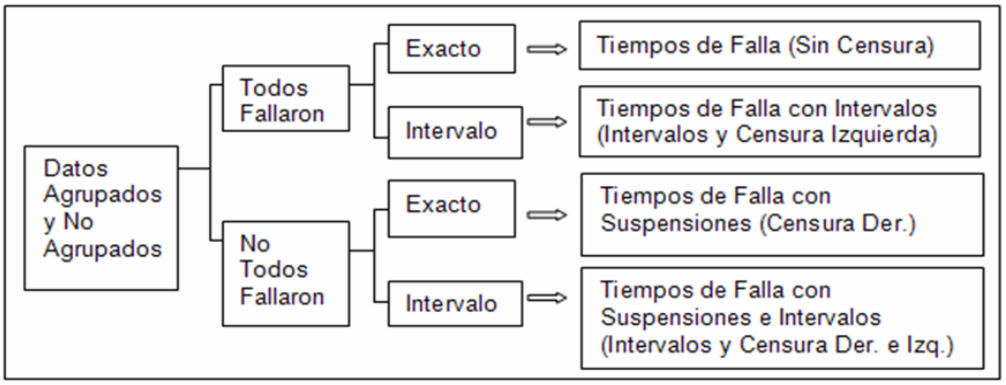

Figura 4.1: Tipos de Datos

4.1.2. Pruebas de Bondad de Ajuste

En el marco formal de las pruebas de hipótesis, la hipótesis nula H_0 es referida a que una variable aleatoria, x, dada que sigue una distribución de probabilidad $F(x)$ (por ejemplo la distribución Weibull); la variable aleatoria puede provenir de un proceso el cual está sujeto a investigación. La prueba de bondad de ajuste aplicada a la prueba H_0 está basada en la medida de discrepancia de la muestra de datos con respecto a la distribución de prueba. Las pruebas de bondad de ajuste generalmente determinan pruebas estadísticas formales y las medidas de consistencia de los estadísticos de prueba.

La hipótesis nula H_0, puede ser una hipótesis simple, si $F(x)$ está completamente especificada, por ejemplo, la distribución Log-Normal con $\mu = 100$ y $\sigma = 10$; H_0 puede ser una especificación incompleta cuando asegura que $F(x)$ es una distribución Normal con parámetros μ y σ.

La prueba de bondad de ajuste compara la distribución de frecuencias observadas o empírica F_n, con una distribución específica. El procedimiento implica el cálculo de una distribución esperada F_0 de la muestra estudiada. El propósito de la prueba es averiguar si existen diferencias estadísticamente significativas entre la distribución observada F_n y la distribución esperada F_0 (D'Agostino y Stephens, 1986).

Existen algunos procedimientos para realizar pruebas de bondad de ajuste, entre las más conocidas destacan la prueba basada en la distribución Chi-cuadrada (χ^2), la prueba de Kolgomorov-Smirnov ($K-S$), la prueba Cramér-von Mises (ω_n^2) y la prueba Anderson-Darling (A_n^2 o AD).

La prueba Chi-cuadrada (χ^2) es de valor limitado cuando se trabaja con la distribución Weibull, además la prueba no puede ser aplicada cuando se tienen tamaños de muestra $n < 25$. La potencia de la prueba es igual a la de la prueba Kolgomorov-Smirnov ($K-S$), y menor que las pruebas Cramér-von Mises (ω_n^2) y Anderson-Darling (A_n^2 o AD) (Dodson, 1994).

Dado esto, las pruebas Cramér-von Mises (ω_n^2) y Anderson-Darling (A_n^2), son mas

potentes y por lo tanto son más recomendables. Estas pruebas tienen una relación estrecha. El estadístico Cramér-von Mises esta dado por:

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 \{F_n(t) - F_0\}^2 \psi(t) dt \tag{4.1}$$

Este estadístico es usado para probar la hipótesis $H_0 = F_n(t) = F_0$. Si $\psi(t) = 1$, ω_n^2 estima el estadístico Cramér-von Mises, y si $\psi(t) = \{F_0(1 - F_0)\}^{-1}$, se estima el estadístico Anderson-Darling. Es común utilizar la prueba Anderson-Darling (A_n^2) debido a su potencia.

- **Prueba Anderson-Darling**

La prueba del Anderson-Darling es una modificación de la prueba Kolmogorov-Smirnov ($K - S$). La principal diferencia radica en que la prueba $K - S$ es de distribución libre en el sentido que los valores críticos no dependen de la distribución específica que es probada (Stephens, 1974). Por otro lado, la prueba de Anderson-Darling hace uso de una distribución específica para calcular valores críticos. Esto tiene la ventaja de permitir una prueba más sensible y la desventaja de que los valores críticos se deben calcular para cada distribución (Dodson, 1994), (Frisco, 1998). Dado que en este caso, se utilizará el estadístico para datos de tiempo de vida, los cuales pueden contener tiempos de falla completos y censurados, se incluye la estimación del estadístico para ambos casos.

1. Estadístico A_n^2 para tiempos de falla completos

   Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ observaciones independientes de la variable aleatoria X, con función de distribución continua $G(x)$. Si se desea probar la hipótesis $H_0 : G(x) = G_0(x)$, donde $G_0(x)$ es una función distribución completamente especificada, entonces la hipótesis nula es equivalente a probar que las observaciones $t_1, t_2, ..., t_n$, donde $t_i = G_0(x)$, provienen de una distribución uniforme $(0, 1)$. Si denotamos con $F(t)$ la función de distribución de $T = G_0(X)$, y $F_n(t)$ la función de distribución

de la muestra (es decir, la proporción de observaciones menores que t), entonces el estadístico Anderson-Darling será (D'Agostino y Stephens, 1986):

$$A_n^2 = n \int_0^1 \{F_n(t) - t\}^2 \{t(1-t)\}^{-1} dt \tag{4.2}$$

La fórmula para el estadístico A_n^2 determina si los datos $\{x_1 < ... < x_n\}$ provienen de una distribución con función acumulada continua $G(x)$.

$$A_n^2 = -n - S, \tag{4.3}$$

donde:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} \left[\ln F(x_i) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))\right] \tag{4.4}$$

El estadístico se puede entonces comparar contra las distribuciones del estadístico de prueba para aceptar o rechazar la hipótesis $H_0 = F_n(t) = F_0$.

2. Estadístico $pA_{n,f}^2$ con tiempos de falla censurados

   En esta sección se muestra la modificación del estadísticoA_n^2 utilizado para realizar la prueba de bondad de ajuste de una cierta proporción de la muestra aleatoria, es decir, la muestra puede contener datos censurados. En particular la distribución asintótica es dada por (Petit y Stephens 1975):

$$_{q,p}A_n^2 = n \int_q^p \frac{\{F_n(t) - t\}^2}{t(1-t)} dt, \tag{4.5}$$

   para valores de p y q; $0 \leq q < p \leq 1$. Si $q = 0$, entonces $_{q,p}A_n^2$ es denotada por $_pA_n^2$ y es igual a $_pA^2$.

   Para muestras pequeñas es posible encontrar expresiones para el estadístico involucrando las observaciones $t_1, t_2, ..., t_n$ explícitamente. Si $t_{(1)} < t_{(2)} < ... < t_{(R)} \leq$

$p < t_{(R+1)} < ...t_{(n)}$, donde R observaciones son menores que p y $t_{(R+1)} < ...t_{(n)}$ son censuradas, entonces:

$$\begin{aligned} {}_pA_n^2 = \sum_{i=1}^{R} \{(2i-1)/n\} \left\{\log(1-t_{(i)}) - \log(t_{(i)})\right\} - 2\sum_{i=1}^{R} \log(1-t_{(i)}) \\ +n\left\{\frac{2R}{n} - \left(\frac{R}{n}\right)^2 - 1\right\} \log(1-p) + \frac{R^2}{n}\log(p) - pn, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde:

R : Número de tiempos de falla completos.

$p = R/n$: Proporción de censura.

$t_{(i)} = F(t_i)$: La función de probabilidad acumulada de prueba evaluada en t_i.

Es conveniente mencionar que en el caso de existir datos censurados en la muestra, es difícil conocer la distribución exacta del estadístico ${}_pA_n^2$ y por consecuencia es complicado calcular un valor de probabilidad.

Dado esto, para realizar la prueba de hipótesis $H_0 : G(x) = G_0(x)$, donde $G_0(x)$ es la función distribución especificada, se consideran los puntos porcentuales estimados por Pettitt y Stephens (1975), D'Agostino y Stephens (1986). Entonces para rechazar la hipótesis, se compara el estadístico ${}_pA_n^2$ estimado mediante la ecuación (4.6) con el punto porcentual de Tablas ${}_2A_{r,n}^2$; donde para rechazar $H_0 : G(x) = G_0(x)$ se debe cumplir ${}_pA_n^2 \geq_2 A_{r,n}^2$. De otro modo, si ${}_pA_n^2 <_2 A_{r,n}^2$, entonces la muestra de tiempos de falla sigue la distribución de prueba $G_0(x)$.

4.1.3. Distribución de Probabilidad Paramétrica

La distribución de probabilidad $F(x)$ modela los resultados obtenidos de un experimento aleatorio. Por ejemplo, para un número dado x, la probabilidad $P(X \leq x)$ es $F(x) = (X \leq x)$. A $F(x)$ se le denomina la función de probabilidad acumulada de la variable aleatoria x y representa la probabilidad de que la variable no exceda el valor x. La distribución de probabilidad depende de la naturaleza de los datos que contenga la

muestra, esta puede ser una distribución de variable aleatoria discreta o distribución de variable aleatoria continua (Dodson y Nolan, 1999).

Debido a que en confiabilidad la muestra está conformada por tiempos de falla del componente en cuestión, los datos obtenidos serán variables aleatorias continuas. Cabe destacar, que la variable aleatoria t es continua en el intervalo $[0, \infty]$, es decir $t \geq 0$, debido a la característica principal del tiempo. Por esta razón, los modelos comúnmente utilizados para representar este tipo de datos son el Exponencial, Weibull, Log-Normal y Gamma. Estos modelos se presentan a continuación.

- **Distribución Weibull**

La distribución Weibull fue desarrollada por Waloddi Weibull en 1937 y publicada en 1951 en el artículo "*A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*" mostrando el amplio rango de aplicabilidad de la distribución. Se demostró además la versatilidad de la distribución para ser usada con muestras pequeñas y su flexibilidad para ser ajustada a una gran variedad de conjuntos de datos. Dadas sus características, la distribución Weibull ha sido ampliamente usada especialmente en el campo de la confiabilidad.

Además de ser la función de densidad más útil para los cálculos de confiabilidad, el análisis de la distribución de Weibull proporciona la información necesaria para la solución de problemas, clasificación del tipo de fallas, programación de planes de mantenimiento y determinación de frecuencias de inspección (Abernethy, 2008). La función de densidad de probabilidad Weibull se define como:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{4.7}$$

Donde:

β : Es el parámetro de forma.

η : Es el parámetro de escala (vida característica).

El parámetro de forma β es continuo y positivo; el parámetro de escala η puede tomar valores discretos como por ejemplo ciclos; sin embargo esto es aceptable solo si la magnitud

de los datos es suficientemente grande. El dominio para estas variables es: $0 < \beta < \infty$ y $0 < \eta < \infty$. Típicamente, el parámetro β toma valores entre 0.5 y 8. Para la distribución Weibull de dos parámetros, η es conocida como la vida característica del componente en cuestión.

1. Áreas de aplicación

   Considerando diferentes valores del parámetro β, la función de densidad Weibull toma distintas formas, como se muestra en la figura 4.2.

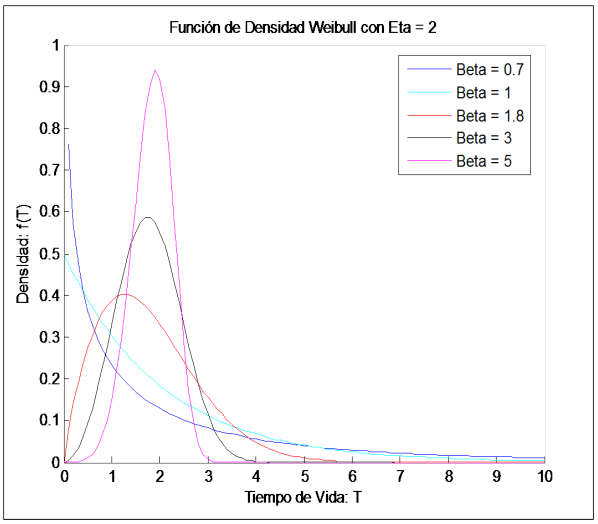

Figura 4.2: Función de Densidad Weibull

La función de distribución Weibull puede ser usada en una amplia variedad de situaciones dependiendo del valor de β, con lo cual puede ser aproximada con algunas otras distribuciones (Gertsbakh, 2000). Por ejemplo si:

$\beta = 1$: La distribución Weibull es idéntica a la distribución exponencial.

$\beta = 2$: La distribución Weibull es idéntica a la distribución Rayleigh.

$\beta = 2.5$: La distribución Weibull se aproxima a la distribución Log-Normal (Estas distribuciones son muy aproximadas si el tamaño de muestra es mayor que 50).

$\beta = 3.6$: La distribución Weibull se aproxima a la distribución Normal.

$\beta = 5$: La distribución Weibull se aproxima a un tipo de distribución Normal.

A pesar de su flexibilidad, existen algunas fallas observadas que no pueden ser modeladas por la distribución Weibull, por ejemplo se ha comprobado que para modelar el tiempo que toma una reacción química en ocurrir se modela mejor mediante una distribución Log-Normal.

2. Vida Media y Varianza

La media o valor esperado (MTTF) de la distribución Weibull es:

$$\mu = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tag{4.8}$$

donde:

$\Gamma(n)$: Es la función Gamma de Euler:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(n-1)} dx \tag{4.9}$$

Cuando $\beta < 1$, la media es mayor que η y se aproxima a infinito mientras que β tiende a cero. Cuando $\beta = 1$, la media es igual a η y decrece conforme β excede a 1. La varianza de la distribución Weibull es:

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] \tag{4.10}$$

La varianza en (4.10) de la distribución Weibull se aproxima a infinito cuando β se aproxima a cero y se aproxima a cero cuando β se aproxima a infinito. En general el *k-ésimo* momento de la distribución Weibull con respecto al origen está dado por la ecuación (4.11):

$$\mu'_k = \eta^k \cdot \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \tag{4.11}$$

3. Función de confiabilidad y tasa de fallas

La función de confiabilidad Weibull describe la probabilidad de sobrevivencia en función del tiempo y se representa por (4.12):

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{\beta(t)^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] dx = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{4.12}$$

La función de confiabilidad (o sobrevivencia) es el complemento de la función de probabilidad acumulada $F(t)$:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{4.13}$$

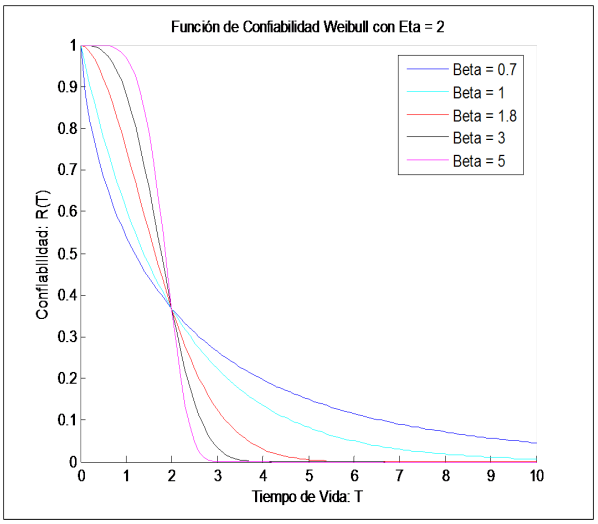

Figura 4.3: Función de Confiabilidad Weibull

La figura 4.3 ilustra el efecto del parámetro β sobre la función confiabilidad. Para el caso de $\beta < 1$, la tasa de cambio en la confiabilidad al inicio decrece bruscamente y después se estabiliza. Este es el resultado de fallas por mortalidad infantil. Para el caso de $\beta = 1$, la tasa de cambio en confiabilidad gradualmente decrece; como resultado de una tasa de fallas constante. Para el caso de $\beta > 1$, la tasa de cambio

en confiabilidad al inicio decrece lentamente y después decrece bruscamente cuando se va alcanzando la vida característica.

4. La curva de la bañera

   La función de tasa de fallas es obtenida mediante la división de la función de probabilidad Weibull (4.7) dividida por la función de confiabilidad (4.12):

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{4.14}$$

   Esta función conocida también como función de tasa de falla instantánea, es usada para representar la curva de la bañera mostrada en la figura 4.4, en la cual se observan tres situaciones correspondientes a un tipo de falla específico. La primera parte se caracteriza por una tasa de falla decreciente ($\beta < 1$). Un sistema o componente con una función de tasa de fallas decreciente presenta fallas tempranas, las cuales son fallas prematuras causadas por materiales defectuosos, materiales inadecuados, manufactura pobre o falla en inspección.

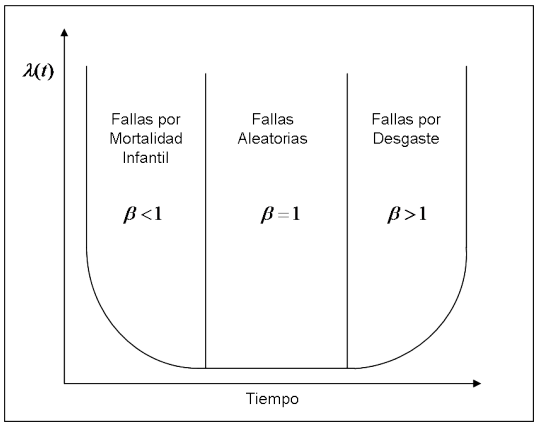

Figura 4.4: Curva de la Bañera

   La segunda sección de la curva se caracteriza por una tasa de falla constante ($\beta = 1$). Las fallas ocurren a una tasa constante, es decir son independientes del tiempo, esto

es conocido como la propiedad de falta de memoria.

La tercera sección se caracteriza por una tasa de falla creciente ($\beta > 1$). Esto representa a los componentes que presentan desgaste por la edad. El componente con mayor edad es el más probable de fallar (Dodson, 1994).

La primera parte está representada por una distribución Weibull de parámetro de forma $\beta < 1$, la sección media está representada por una distribución Weibull de parámetro $\beta = 1$ y la tercera sección se representa mediante una distribución Weibull de parámetro de forma $\beta > 1$.

- **Distribución Exponencial**

La distribución exponencial es una distribución continua relacionada con la distribución de probabilidad discreta Poisson. Si el número de fallas por unidad de tiempo sigue una distribución Poisson, entonces el tiempo medio entre fallas (MTBF) sigue una distribución exponencial. Además, como ya se mencionó, la distribución exponencial tiene una función de tasa de fallas constante.

La distribución exponencial, es una distribución de un solo parámetro, expresado en términos de su media β, o el inverso de su media $\lambda = 1/\beta$. La función de densidad exponencial en términos del parámetro λ es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{4.15}$$

donde:

$\frac{1}{\lambda}$: La media de la distribución.

La función de confiabilidad exponencial está dada por:

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \tag{4.16}$$

Además, la función de tasa de fallas es:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{4.17}$$

La función de tasa de fallas exponencial es constante, ésta tasa de falla es única de la distribución exponencial y es debido a la propiedad de falta de memoria de la distribución. "Falta de Memoria" significa que la probabilidad de falla en un intervalo de tiempo específico es la misma que al inicio del intervalo (Dodson y Nolan, 1999). La media y la varianza de la función de distribución exponencial son:

$$\mu = \beta = \frac{1}{\lambda} \tag{4.18}$$

$$\sigma^2 = \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{4.19}$$

- **Distribución Log-Normal**

Las Distribuciones Log-Normal y Normal están relacionadas a través de la función logaritmo. Si $t$es una variable aleatoria con distribución Log-Normal, entonces $y = \ln(t)$ es una variable aleatoria con distribución Normal. La función de densidad de la distribución Log-Normal es:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad t > 0 \tag{4.20}$$

Los parámetros de la distribución Log-Normal son μ, que es un parámetro de localización y σ que es un parámetro de escala (algunas veces se le nombra parámetro de forma). El parámetro de localización puede estimarse de la expresión (4.21):

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}, \tag{4.21}$$

donde n es el tamaño de la muestra. El parámetro de escala es estimado mediante la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} \ln t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln t_i\right)^2}{n(n-1)}} \tag{4.22}$$

La media de la función de distribución Log-Normal esta dada por:

$$E[t] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] = Q_{50} \exp\left[\frac{\sigma^2}{2}\right] \tag{4.23}$$

La varianza de la función de distribución Log-Normal se representa:

$$V[t] = \exp\left[2\mu + 2\sigma^2\right] = Q_{50} \exp\left[\frac{\sigma^2}{2}\right]\left(\exp\left[\sigma^2\right] - 1\right), \tag{4.24}$$

donde Q_{50} representa la mediana de la distribución. La función de confiabilidad Log-Normal esta dada por:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \quad t > 0 \tag{4.25}$$

La función de tasa de fallas para la distribución Log-Normal es:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{t\sigma\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)\right]}, \quad t > 0 \tag{4.26}$$

La función de tasa de fallas es creciente al inicio, después decrece y se aproxima a cero. Para valores grandes de σ ($\sigma > 1.5$), la función de tasa de fallas decrece rápidamente.

- **Distribución Gamma**

La Distribución Gamma es una distribución continua que describe variables aleatorias que están limitadas a un extremo. La distribución Gamma es comúnmente usada para modelar el tiempo de vida de sistemas. Si un evento ocurre después de que n eventos exponencialmente distribuidos ocurren secuencialmente, la variable aleatoria resultante sigue una distribución Gamma. Matemáticamente, si $y_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ y $t_1, t_2, ..., t_n$ están distribuidos exponencialmente con tasas de falla idénticas, entonces y_n sigue una distribución Gamma. Algunos ejemplos:

- El tiempo a la falla de un sistema formado por n componentes independientes, con $n - 1$ componentes en espera; en este caso, el sistema falla, si fallan los n componentes.

- El tiempo entre acciones de mantenimiento para un sistema que requiere ser reparado después de un número definido de usos.

La función de densidad de la distribución Gamma es:

$$f(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\eta)} t^{(\eta-1)} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \ \eta \geq 0, \ \lambda \geq 0 \tag{4.27}$$

Donde:

η : Es el parámetro de forma.

λ : Es el parámetro de escala.

$\Gamma(n)$: Es la función Gamma dada en (4.9).

La media de la distribución Gamma esta dada por:

$$E[t] = \frac{\eta}{\lambda} \tag{4.28}$$

La varianza de la distribución Gamma es:

$$V[t] = \frac{\eta}{\lambda^2} \tag{4.29}$$

Los parámetros de la distribución Gamma pueden ser estimados mediante las expresiones:

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{s^2} \tag{4.30}$$

$$\hat{\eta} = \hat{\lambda}\bar{x} \tag{4.31}$$

donde:

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$: Es la varianza de la muestra.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$: Es el promedio de la muestra.

Estas ecuaciones están basadas en el método de igualdad de momentos. Las estimaciones por otro método de nombre máxima verosimilitud tienen propiedades distribucionales deseables. Este método se mostrará en un apartado posterior.

La función de probabilidad Gamma es muy versátil, cuando $\eta = 1$, la distribución Gamma se reduce a la distribución exponencial. Cuando η es un entero positivo, es una distribución erlang (distribución utilizada en teoría de colas). En el caso de η=2, la distribución Gamma se reduce a la distribución Chi-cuadrada con $\nu = 2\eta$ grados de libertad.

Además, la distribución Gamma se aproxima a la distribución Normal cuando η es suficientemente grande.

La función de confiabilidad Gamma no existe en forma cerrada, a menos que el parámetro η sea restringido a valores enteros. Para este caso en especial la función de confiabilidad Gamma será:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad t \geq 0 \tag{4.32}$$

La función de tasa de fallas de la distribución Gamma no existe en forma cerrada, a menos que el parámetro η sea restringido a valores enteros (Zacks, 1992). Para este caso en especial la función de tasa de fallas será:

$$h(t) = \frac{\frac{\lambda^n}{\Gamma(\eta)} t^{(\eta-1)} e^{-\lambda t}}{\sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}, \quad t \geq 0 \tag{4.33}$$

Una opción para la función acumulada de probabilidad Gamma es la función Gamma regularizada:

$$F(t; \eta, \lambda) = \frac{\Gamma(\eta, \lambda/t)}{\Gamma(\eta)}, \tag{4.34}$$

donde el numerador es la función Gamma incompleta por arriba $\Gamma(\eta, \lambda/t) = \int_{\lambda/t}^{\infty} t^{\eta-1} e^{-t} dt$ y el denominador es la función Gamma dada por la ecuación (4.9).

4.1.4. Estimación de Parámetros

Una vez que se determina la función de probabilidad que mejor representa el comportamiento de los datos, se procede a estimar los parámetros de la distribución basados en la muestra aleatoria. Algunos métodos utilizados para determinar los parámetros de la distribución son:

- Mínimos Cuadrados
- Igualdad de Momentos

- Máxima Verosimilitud

De los métodos antes mencionados, el más utilizado en confiabilidad es el método de máxima verosimilitud debido a la existencia de censura en la muestra y sus propiedades asintóticas con respecto a la distribución Normal. En general, algunas propiedades de los estimadores de Máxima Verosimilitud:

- Son consistentes
- Son invariantes frente a transformaciones uno a uno, es decir, si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil de θ y $g(\bar{\theta})$ es una función uno a uno de $\bar{\theta}$, entonces $g(\hat{\theta})$ es el estimador máximo verosímil de $g(\theta)$.
- Son asintóticamente normales.
- Son asintóticamente eficientes, es decir, entre todos los estimadores consistentes de un parámetro θ, los de máxima verosimilitud son los de varianza mínima.

Suponga que $Y_1, ..., Y_n$ son n variables aleatorias independientes, con funciones de densidad $f_i(y_i; \theta)$ dependientes del vector de parámetros θ. La función conjunta de las n observaciones independientes $y = (y_1, ...y_n)^T$ es (Rodríguez, 2001):

$$f(y, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i; \theta) = L(\theta; y) \tag{4.35}$$

Esta expresión vista como una función de parámetros desconocidos θ, dados los datos y, es llamada la función de verosimilitud. Generalmente, se trabaja con el logaritmo natural (denotado por log) de la función de verosimilitud a lo cual se le llama función de log-verosimilitud.

$$\log L(\theta; y) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(y_i; \theta) \tag{4.36}$$

Por otro lado, cuando se tiene datos censurados en la muestra, la función de verosimilitud se construye de una forma muy similar a (4.36) utilizando adicionalmente la función de confiabilidad $R(t)$ como sigue.

Sea T una variable aleatoria que representa el tiempo hasta que el evento T_i (posiblemente censurado) represente la falla de la $i-ésima$ observación e Y_i denota la falla observada o tiempo censurado $\text{mín}(T_i, C_i)$, donde C_i representa el tiempo censurado. Si Y_i es no censurado, la observación i contribuye a la ecuación de verosimilitud igual que a la función de densidad para T evaluada en $Y_i, f(Y_i)$. Si Y_i representa un tiempo censurado tal que $T_i = Y_i^+$, solo se conoce que T_i excede a Y_i. La contribución a la función de verosimilitud es la probabilidad de que $T_i > C_i$ (igual a $P\{T_i > Y_i\}$). Esta probabilidad se conoce como $R(Y_i)$. La verosimilitud conjunta sobre todas las observaciones $i = 1, ..., n$ es:

$$L(\theta; y) = \prod_{i:Y_i\, no\, censurado}^{n} f_i(Y_i; \theta) \prod_{i:Y_i\, censurado}^{n} R_i(Y_i; \theta) \tag{4.37}$$

En la ecuación (4.37), se observa que existe un componente adicional en la función de verosimilitud $L(\theta; y)$: la distribución de los tiempos de falla censurados.

Como se supone que los tiempos censurados son "no informativos", entonces son independientes del riesgo del evento en cuestión. Esta independencia implica que el componente de la función de verosimilitud correspondiente a la distribución de los datos censurados, simplemente multiplica a $L(\theta; y)$ y que la distribución de los datos censurados contiene poca información acerca de la distribución de confiabilidad (o sobrevivencia) (Harrell, 2001).

Adicionalmente, la función de distribución de los datos censurados, puede ser difícil de especificar, por esta razón se puede maximizar $L(\theta; y)$ en forma independiente para estimar los parámetros de $R(t)$, e ignorar la distribución de los datos censurados. Considerando que $\lambda(t) = f(t)/R(t)$, entonces $f(t) = \lambda(t) \cdot R(t)$ y como la función de tasa de riesgo acumulado es $\Lambda(t) = -\log R(t)$, la función de log-verosimilitud puede ser escrita como sigue:

$$\log L(\theta; y) = \sum_{i:Y_i\, no\, censurado}^{n} \log \lambda(Y_i; \theta) - \sum_{i=1}^{n} \Lambda(Y_i; \theta) \tag{4.38}$$

Una vez estructurada la función $L(\theta; y)$ o $\log L(\theta; y)$ ambas pueden ser utilizadas para la estimación del vector de parámetros θ. La diferencia principal radica en que los datos censurados contribuyen con menos información a la inferencia estadística comparados con los datos de tiempos de falla completos.

Una forma de estimar el vector de parámetros θ dados los datos y, es maximizando la función de verosimilitud (o de forma equivalente la función de log-verosimilitud), escogiendo el vector de parámetros que hacen los datos observados lo más verosímiles posible.

Formalmente se define el estimador de máxima verosimilitud (MLE), como el valor $\hat{\theta}$:

$$\log L(\hat{\theta}; y) \geq \log L(\theta; y) \text{ para todo } \theta. \tag{4.39}$$

La primera derivada de la función de log-verosimilitud es llamada función de calificación de Fisher (Fisher's score function), y se denota por:

$$u(\theta) = \frac{\partial \log L(\theta; y)}{\partial \theta} \tag{4.40}$$

Si la función de log-verosimilitud es cóncava, se puede encontrar el estimador de máxima verosimilitud igualando la segunda derivada a cero $u(\hat{\theta}) = 0$. La función de calificación es un vector aleatorio con algunas propiedades estadísticas interesantes. En particular, la función evaluada en los valores verdaderos de θ, tiene media cero $E[u(\theta)] = 0$ con matriz de varianzas y co-varianzas dada por la *matriz de información*:

$$var[u(\theta)] = E[u(\theta)u'(\theta)] = I(\theta) \tag{4.41}$$

Bajo condiciones regulares, la matriz de información puede ser obtenida como menos el valor esperado de las segundas derivadas de la función de log-verosimilitud (Pham, 2006):

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right] \tag{4.42}$$

La matriz observada de las segundas derivadas negativas, es llamada la matriz de información observada.

Por otro lado, bajo ciertas condiciones de regularidad, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para muestras grandes, sigue aproximadamente una distribución Normal con media igual al parámetro verdadero y matriz de varianzas y co-varianzas dada por el inverso de la matriz de información, esto es:

$$\hat{\theta} \sim N_p(\theta, I^{-1}(\theta)) \tag{4.43}$$

Las condiciones de regularidad incluyen lo siguiente: el valor del parámetro verdadero θ debe estar contenido en el espacio de parámetros, la función de log-verosimilitud deberá ser tres veces diferenciable y las terceras derivadas deben ser limitadas.

Estos resultados proveen las bases para construir pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Por ejemplo, bajo la hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ para algún valor fijo de θ_0, la forma cuadrática es:

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)^T var^{-1}(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta_0), \tag{4.44}$$

para muestras grandes sigue aproximadamente una distribución χ^2 con p grados de libertad. Estos resultados pueden ser extendidos para cualquier combinación lineal de θ, incluyendo sub-conjuntos de elementos de θ.

Cuando el subconjunto contiene solo un elemento usualmente se toma la raíz cuadrada del estadístico de Wald, como un estadístico z, (Hauck, 1977):

$$z = \frac{\hat{\theta}_j}{\sqrt{var(\hat{\theta}_j)}} \tag{4.45}$$

Estos resultados pueden ser modificados sustituyendo la matriz de varianzas y covarianzas del estimador de máxima verosimilitud con el inverso de la matriz de información observada:

$$\hat{var}(\hat{\theta}) = I^{-1}(\hat{\theta}) \tag{4.46}$$

4.1.5. Weibayes

Específicamente para el modelo Weibull, existe un método de estimación de parámetros basado en el método de máxima verosimilitud, utilizado principalmente cuando no se cuenta con tiempos de falla, es decir solo se tienen datos censurados.

Weibayes es definido como un análisis Weibull dado el parámetro de forma β, es como un modelo Weibull de un parámetro. Fue desarrollado por Abernethy en Pratt & Whitney Aircraft en los años 70's, para resolver problemas cuando el análisis tradicional Weibull tiene alta incertidumbre o no puede ser usada porque no hay tiempos de falla.

Weibayes ofrece incrementos significativos en precisión comparado con Weibull de muestras pequeñas. Por lo tanto, Weibayes es la "mejor practica" para muestras pequeñas o cero tiempos de falla, si se cuenta con una estimación razonable del parámetro de forma (Abernethy, 2008).

En un análisis Weibayes el parámetro de forma se asume de datos históricos, del API, por experiencia previa en planta o por conocimiento a cerca de la física de las fallas (literatura). Con una β dada, el parámetro de escala η puede ser calculado en los casos cuando existan o no tiempos de falla.

- **Weibayes con tiempos de falla**

Si r fallas han ocurrido y se usa Weibayes; $\hat{\eta}$ es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro verdadero de η.

$$L(\theta; x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x) \cdot \prod_{j=1}^{k} R(x) \tag{4.47}$$

Si $f(x)$ representa es una función de densidad Weibull dada por la función (4.7) y la función de confiabilidad (4.12), entonces la función de verosimilitud estará representada por:

$$L(t; \beta, \eta) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}} \cdot \prod_{j=1}^{k} e^{-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{4.48}$$

El estimador de máxima verosimilitud (MLE por sus siglas en inglés) para el logaritmo de la función (4.48) será:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \log(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} \log(t_i) - \frac{1}{\hat{\beta}} = 0 \tag{4.49}$$

donde:

r= Número de fallas.

n= Número de observaciones censuradas o no censuradas.

t_i = Tiempo observado.

El valor de $\hat{\beta}$ es encontrado mediante un proceso iterativo, una vez estimado el valor de $\hat{\beta}$, el parámetro de escala es:

$$\hat{\eta} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{\hat{\beta}}}{r}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \tag{4.50}$$

- **Weibayes sin tiempos de falla**

Cuando ninguna falla ha ocurrido en un conjunto de n unidades, es decir con tiempo de falla censurados $t_1, t_2, ..., t_n$ y las unidades son susceptibles a un modo de falla Weibull con β conocida y η desconocida, entonces un intervalo de confianza conservativo $100(1-\alpha)\,\%$ es:

$$\eta^{\beta} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}{-\ln(\alpha)} \Rightarrow \eta \geq \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}{-\ln(\alpha)}\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.51}$$

Conservativo significa que el nivel del intervalo de confianza verdadero es desconocido, pero es al menos $100(1-\alpha)\,\%$. Asumiendo $r = 1$, Weibayes provee un $63.2\,\%$, sin embargo puede ser usado a cualquier nivel de confianza. Esto es,$-\ln(\alpha) = 1, \alpha = e^{-1} = 0.368$, por lo tanto $100(1-0.368)\,\% = 63.2\,\%$ intervalo inferior de confianza para η (Abernethy, 2008). Por otro lado, Nelson (1985) propone algunos métodos para determinar intervalos de confianza para Weibayes cuando existen tiempos de falla.

- **Corrección por sesgo para el modelo Weibull**

Cuando se utiliza el método de máxima verosimilitud para muestras pequeñas el valor estimado de los parámetros del modelo es sesgado, en este caso para tamaños de muestra medianos o pequeños (de 1 a 100), una posible opción es utilizar la corrección MLE-RBA (por las siglas en inglés de Reduced Bias Adjustment).

Investigaciones recientes realizadas por Barringer (Abernethy, 2008) muestran empíricamente que el factor RBA para el parámetro β es la corrección C_4 utilizada en control estadístico del proceso. Esto es, si multiplicamos $\hat{\beta}$ MLE por $C_4^{3.520}$, se elimina el sesgo mediano:

$$\beta_{insesgado} = \hat{\beta} \cdot C_4^{3.520} \; y \; \eta_{insesgado} = \hat{\eta} \cdot C_4^{-0.217} \tag{4.52}$$

donde

$$C_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{4.53}$$

n =Número de fallas sin incluir datos censurados.

- **Distribución de probabilidad no-paramétrica**

Como ya se mencionó, la muestra obtenida del experimento aleatorio es sometida a una prueba de bondad de ajuste para determinar la distribución que mejor representa el comportamiento de la variable aleatoria. En ocasiones, el comportamiento de los datos no puede representado mediante una función con parámetros conocidos, en estos casos se utilizan modelos no-paramétricos para estimar la confiabilidad del sistema en cuestión, estos modelos se basan en el comportamiento real de la variable aleatoria. Los métodos no paramétricos, no suponen el conocimiento de ninguna distribución, por lo tanto, también se les llama métodos de distribución libre.

La mayoría de los métodos no paramétricos implican el análisis del rango de los datos, por lo que no se utilizan los valores de la muestra. Cuando existen problemas de divergencia los métodos no paramétricos son más eficientes que los métodos paramétricos (Harrell, 2001).

Algunos métodos no paramétricos para el cálculo de la confiabilidad son el método del Rango Medio y la estimación por Kaplan-Meier, de estos métodos es común encontrar la utilización del estimador de Kaplan-Meier, incluso para realizar pruebas de bondad de ajuste para datos censurados.

- **Estimador de Kaplan-Meier**

En esta sección se describe un procedimiento no paramétrico muy usado para la estimación de la función de confiabilidad $R(t)$. Este procedimiento no asume ninguna forma paramétrica y supone que se cuenta con la información necesaria para la estimación.

Un grupo de n componentes idénticos empieza a operar al tiempo $t_0 = 0$. Durante la operación los componentes pueden fallar e incluso perderse y salir del proceso de operación. Se lleva un registro de las fallas junto con los componentes que siguen operando o que aún no han fallado.

Suponga que las fallas ocurren en los instantes de tiempo $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$. Sea n_j el número de componentes "en riesgo" (o que sobreviven) justo antes del tiempo t_j. Denote con w_j el número del número de componentes fuera del proceso de observación en el intervalo entre la $(j-1)-ésima$ y la $j-ésima$ falla, en el intervalo $(t_{j-1}, t_j)\,, t_0 = 0$. Obviamente, $n_1 = n - w_1,\ n_2 = n_1 - 1 - w_1$, etc.

Kaplan y Meier (1958) sugieren el estimador no paramétrico $\hat{R}(t)$ de la función de confiabilidad $R(t)$, el cual se define mediante la siguiente expresión:

$$\hat{R}(t) = \prod_{\{i:t_i \leq t\}} (1 - 1/n_i), \tag{4.54}$$

$\hat{R}(t)$ es continua por la derecha. Es igual a 1 para $0 \leq t \leq t_1$. Una estimación heurística del estimador (4.44), se desarrolla como sigue. Suponga que las observaciones de la muestra se llevan a cabo en los instantes de tiempo $t_i^*,\ i = 1, 2, ..., t_i^*$, se registra el número de n_j^* de componentes que siguen en el proceso o con vida justo antes del instante de la observación. Además, asuma que el número de fallas d_j^* es conocido en el intervalo

$\Delta_j = \left(t^*_{j-1}, t_j\right)$. Adicionalmente, se conoce el número de componentes w_j "perdidos" en tal intervalo. Sea τ el tiempo de falla del componente. Entonces decimos que $P\left(\tau > t^*_j\right) = R\left(t^*_j\right) = P\left(\textit{sobreviva después de } t^*_j\right)$. Obviamente:

$$R\left(t^*_j\right) = P\left(\tau > t^*_0\right) P\left(\tau > t^*_1 | \tau > t^*_0\right) ... P\left(\tau > t^*_j | \tau > t^*_{j-1}\right) \tag{4.55}$$

Sea $p_i = P\left(\tau > t^*_i | \tau > t^*_{i-1}\right)$. Una estimación de p_i, es la cantidad $p_i = 1 - d^*_i / \hat{n}^*_i$, donde $\hat{n}^*_i$ es el número promedio de componentes en operación durante el intervalo Δ_i. Entonces, es razonable establecer $\hat{n}^*_j = n^*_j - w_j/2$. Por lo tanto, la llamada tabla de vida estimada $\bar{R}(t_j)$ de $R(t_j)$ se obtiene como:

$$\bar{R}(t_j) = \prod_{i=1}^{j} \hat{p}_i \tag{4.56}$$

El estimador de Kaplan-Meier puede ser visto como el caso límite del estimador (4.44). Imagine que las longitudes de Δ_j tienden a cero, y el número de estos intervalos tiende a infinito. Algunos de estos intervalos que no contienen fallas van a contribuir a (4.44) con un factor de 1. La única contribución no trivial corresponderá a los intervalos que contengan fallas. Para estos, los instantes de falla son separados unos de otros $\hat{p}^*_i = 1 - 1/n^*_i = 1 - 1/n_i$. Con esto, encontramos el estimador de Kaplan-Meier también llamado el estimador producto limite (PL) (Gertsbakh, 2000).

La fórmula conocida en la literatura como el estimador de Greenwood, proporciona una estimación de la varianza $V\hat{a}r\left[\hat{R}(t)\right]$:

$$V\hat{a}r\left[\hat{R}(t)\right] = \left[\hat{R}(t)\right]^2 \sum_{\{i:t_i \leq t\}} \left(n_i\left(n_i - 1\right)\right)^{-1} \tag{4.57}$$

Un intervalo de confianza $1 - 2\alpha$ de la confiabilidad para un valor específico t puede ser obtenido por:

$$\left[\hat{R}(t) - z_\alpha \left(V\hat{a}r\left[R(t)\right]\right)^{0.5}, \hat{R}(t) + z_\alpha \left(V\hat{a}r\left[R(t)\right]\right)^{0.5}\right] \tag{4.58}$$

donde z_α es el cuantil α de una distribución Normal Estándar $N(0,1)$.

4.1.6. Estimación de Confiabilidad

Gran parte de la teoría de confiabilidad mostrada en secciones anteriores, se ocupa de los patrones de falla para componentes individuales o para sistemas de componentes, sin embargo de estos se derivan temas para estrategias de reemplazo por edad las cuales conciernen a la economía de reemplazar el equipo antes de que falle para disminuir la probabilidad de que ocurra un error o falla durante la operación. Con este fin, en esta sección se muestran las bases para la estimación de confiabilidad, probabilidad de falla, tasa de fallas entre otros indicadores.

Además de las funciones de distribución acumulada $F(t)$ y de densidad $f(t)$ de la variable aleatoria T, son de interés otras relaciones afines; en el caso de $f(t)$ y $F(t)$ es como sigue:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \tag{4.59}$$

Una de las funciones de interés es la función de confiabilidad (llamada también función de supervivencia), esta función está definida como:

$$R(t) = P\{T \leq t\} = 1 - F(t) \tag{4.60}$$

La función $R(t)$, representa la probabilidad de que un componente nuevo no sobreviva más del tiempo t. Existe una relación fundamental en la teoría de confiabilidad a la cual se le llama función de tasa de fallas o función de frecuencia de fallas y esta dada por:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{4.61}$$

La función de tasa de fallas representa la rapidez de cambio de la probabilidad condicional de falla en el momento t. Se puede considerar como una medida de la probabilidad de que un componente que ha sobrevivido hasta el tiempo t falle en el siguiente instante.

Otros indicadores importantes son el Tiempo Medio Entre Fallas ($MTBF$), el Tiempo Medio a la Falla ($MTTF$) y el Tiempo Medio de Reparación ($MTTR$), los cuales se utilizan para calcular la disponibilidad del equipo. El indicador $MTTF$ es el tiempo

medio en que trabajará un sistema antes de que falle por primera vez (Gertsbakh, 2000). Es decir, si tenemos n componentes idénticos que empiezan a funcionar en el instante $t = 0$ y medimos el tiempo que tarda cada uno en averiarse, la media de estas medidas constituye el $MTTF$.

Por otro lado, si T es una variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un componente en averiarse, entonces su valor esperado será:

$$E[t] = MTTF = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt \tag{4.62}$$

El Tiempo Medio de Reparación ($MTTR$), indica el tiempo promedio que se necesita para reparar un sistema, se calcula experimentalmente estimando el tiempo t, requerido para la restauración de un sistema cuando ha ocurrido una falla. Este indicador, se expresa mediante una tasa de reparación μ, que indica el número medio de reparaciones por unidad de tiempo.

$$MTTR = 1/\mu \tag{4.63}$$

El Tiempo Medio Entre Fallas ($MTBF$), es el tiempo medio que transcurre entre dos averías consecutivas de un sistema, para calcularlo se debe considerar el tiempo necesario para reparar el sistema y volver a reactivar su funcionamiento, lo cual indica que es aplicado solamente a sistemas reparables.

Considerando que al reparar un sistema, este queda como nuevo (en las mismas condiciones que cuando se puso en funcionamiento), existe una relación entre $MTTF$, $MTTR$ y $MTBF$ que se conoce como disponibilidad, la cual se define como la probabilidad de que el sistema esté funcionando en un tiempo determinado (Dodson y Nolan, 1999), (Zacks, 1992). La disponibilidad depende del $MTBF$ y el $MTTR$, por lo tanto, se aplica solo a sistemas reparables. Esto es, si un sistema experimenta N fallas a lo largo de su vida, estará $N * MTTF$ horas operando y $N * MTTR$ horas en reparación; por lo tanto, la disponibilidad media será:

$$A = \frac{N * MTTF}{N * MTTF + N * MTTR} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \tag{4.64}$$

4.2. Modelo Paramétrico de Riesgo Proporcional

Como una generalización de los modelos de sobrevivencia, existen los modelos paramétricos de riesgo proporcional que representan una generalización de un modelo de sobrevivencia en forma de un modelo de regresión. En otras palabras, se realiza un modelo heterogéneo agregando covariables $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$.

El modelo de sobrevivencia en forma de regresión más usado es representando la función de riesgo $\lambda(t)$ multiplicada por la exponencial de los cofactores $\exp(X\beta)$. El modelo de sobrevivencia generalizado se obtiene cambiando la función de riesgo $\lambda(t)$ para un tiempo determinado T, por la función de riesgo $\lambda(t)\exp(X\beta)$ para un tiempo de falla, dados los cofactores:

$$\lambda(t|X) = \lambda(t)\exp(X\beta) \tag{4.65}$$

Esta forma de regresión es llamada modelo de riesgo proporcional. La parte correspondiente a $\lambda(t)$, proveniente de $\lambda(t|X)$, es llamada función de riesgo base. Note que cualquier función de riesgo paramétrica puede ser usada para representar $\lambda(t)$.

El modelo de riesgo proporcional es el más popular para el análisis de datos de tiempo de falla (Harrell, 2001). El modelo asume que los covariantes actúan multiplicativamente sobre la función de riesgo, sin embargo, el riesgo puede tomar cualquier forma; exponencial, Weibull o cualquier otra forma particular.

La parte de regresión del modelo es completamente paramétrica, esto es, los regresores están relacionados linealmente con el logaritmo del riesgo o con el logaritmo del riesgo acumulado. La estimación de los parámetros en los modelos de riesgo proporcional se realiza mediante el método de máxima verosimilitud.

Sea T una variable aleatoria que representa el tiempo hasta que el evento T_i (posiblemente censurado) termina, lo que representa el tiempo de falla de la $i-ésima$ observación y Y_i denota la falla observada o tiempo censurado $\text{mín}(T_i, C_i)$, donde C_i representa el tiempo censurado. Si Y_i es no censurado, la observación i contribuye a la ecuación de verosimilitud

igual a la función de densidad para T evaluada en $Y_i, f(Y_i)$. Si Y_i representa un tiempo censurado tal que $T_i = Y_i^+$, solo se conoce que T_i excede a Y_i. La contribución a la función de verosimilitud es la probabilidad de que $T_i > C_i$ (igual a $P\{T_i > Y_i\}$). Esta probabilidad se conoce como $R(Y_i)$. La verosimilitud conjunta sobre todas las observaciones $i = 1, ..., n$ es (Harrell, 2001):

$$L = \prod_{i:Y_i\, no\, censurado}^{n} f(Y_i) \prod_{i:Y_i\, censurado}^{n} R(Y_i) \tag{4.66}$$

Para obtener la función de log-verosimilitud, se toma el logaritmo natural de la ecuación (4.56). En el caso particular de los modelos de riesgo proporcional, la función de log-verosimilitud es construida de la misma forma, con la diferencia de que se incluye $\exp(X_i\alpha)$ en la función. Por ejemplo, para el caso particular del modelo Weibull, la función de riesgo base es:

$$\lambda_o(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{4.67}$$

Por lo tanto, la función de riesgo base proporcional seria:

$$\lambda(t, X) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp(X_i\alpha) \tag{4.68}$$

En algunos casos el modelo puede ser escrito de una forma numéricamente más estable, esto es, se elimina el parámetro de escala del modelo y se agrega el intercepto como un covariante adicional α_0, por lo tanto la función de riesgo para el modelo Weibull de riesgo proporcional estará dada por:

$$\lambda(t, X) = \beta t^{\beta-1} e^{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_j} \tag{4.69}$$

Por otro lado, la función de confiabilidad del modelo esta dada por:

$$R(t, X) = e^{-\int_0^t \lambda(u,X)du} = e^{-t^\beta e^{\sum_{j=o}^{m} \alpha_j x_j}} \tag{4.70}$$

Mediante la relación $f(t) = \lambda(t)R(t)$, tomando la derivada parcial de la función de confiabilidad dada por (4.60) con respecto al tiempo, la función de densidad del modelo

de riesgo proporcional será:

$$f(t,X) = \beta \cdot t^{\beta-1} e^{\left[\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_j - t^{\beta} \cdot e^{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_j}\right]}, \tag{4.71}$$

donde el número total de parámetros a estimar es $m+2$. Por lo tanto, la función de log-verosimilitud para el modelo de riesgo proporcional Weibull es:

$$\begin{aligned} \ln(L) = & \sum_{i:T_i\, no\, censurado}^{n} N_i \ln\left(\beta \cdot T_i^{\beta-1} e^{T_i^{\beta} \cdot e^{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_{i,j}}} e^{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_{i,j}}\right) \\ & - \sum_{i:T_i\, censurado}^{n} N_i' \left(T_i'\right)^{\beta} e^{\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_{i,j}} \end{aligned} \tag{4.72}$$

En muchas situaciones, la forma real de la función de riesgo es compleja y desconocida, por esto el modelo de riesgo proporcional de Cox (1972) tiene ventajas sobre éstos modelos.

4.3. Modelo de Riesgo Proporcional de Cox

El modelo de riesgo proporcional ha tenido un papel importante en el análisis de supervivencia desde que fue propuesto por Cox (1972), éste modelo ha sido usado ampliamente en muchas áreas, principalmente en investigaciones biomédicas, para probar los efectos que tienen algunos covariantes sobre el tiempo de algunos eventos en presencia de datos censurados. Dado que la restricción de tiempo puede no permitirnos observar la falla de cada unidad experimental, para algunas unidades solo conocemos que la falla no ocurrió hasta el final del estudio, lo cual representa un evento censurado y puede ser representado por el modelo de Cox.

Asignando T como el tiempo de falla, C representa la censura de ese tiempo y $Z = \{Z_1, ...Z_p\}^T$ es un vector de covariantes de dimensión p, el vector de covariantes Z es en este caso independiente del tiempo. El tiempo de falla T puede no siempre ser observado debido a la censura de los datos, por lo tanto se observa $X = \text{mín}(T, C)$, el mínimo tiempo

de falla y el tiempo censurado, donde $\Delta = I(T \leq C)$, representa el indicador de falla que ha sido observado. El conjunto de datos que ha sido obtenido del análisis de falla esta compuesto por n realizaciones independientes de (X, Z, Δ).

Entonces, $P(T > t|Z)$ representa la función de confiabilidad condicional, donde la función condicional de riesgo esta dada por (Pham, 2006):

$$\lambda\left(t/Z\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P\left(t \leq T < t + \Delta t / T \geq t, Z\right), \tag{4.73}$$

el cual representa el riesgo instantáneo en el tiempo t, dado que la falla no ha ocurrido antes del tiempo t. Existen diferentes formas de modelar la relación entre el tiempo de falla y los covariantes; en el modelo de riesgo proporcional es de la forma:

$$\lambda(t/Z) = \lambda_0(t) \exp\left(\beta^T Z\right), \tag{4.74}$$

donde $\lambda_0(t)$ es una función de riesgo desconocida correspondiente a $Z = (0, ..., 0)$ y $\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)$ es el vector de los coeficientes de regresión.

El método no asume una distribución paramétrica de tiempo de falla, sin embargo asume que los efectos de las diferentes variables en el tiempo de falla, son constantes a través del tiempo y son multiplicativas en el riesgo. El modelo es llamado modelo de riesgo proporcional debido a que la proporción de riesgo de dos unidades experimentales cualesquiera es siempre constante:

$$\frac{\lambda(t/Z)}{\lambda(t/Z)} = \frac{\lambda_0 \exp(\beta^T z)}{\lambda_0 \exp(\beta^T z')} = \exp\left[\beta^T (z - z')\right], \tag{4.75}$$

donde z y z' son los covariables correspondientes a cada unidad, esta cantidad es llamada comúnmente proporción de riesgo o riesgo relativo.

La interpretación del parámetro β es similar que en cualquier otro modelo de regresión. Por ejemplo, $\exp(\beta_1)$ es el riesgo de dos unidades de estudio donde el valor del primer covariante difiere de 1 y el valor de cualquier otro covariante es el mismo. El objetivo principal es realizar inferencias acerca de β o de un conjunto de $\beta's$ para determinar si uno o varios covariantes tienen influencia sobre la confiabilidad de algún componente o

no. El modelo de riesgo proporcional es considerado semi-paramétrico, debido a que el riesgo base $\lambda_0(\cdot)$ es un parámetro de dimensiones infinitas.

Por otro lado, el modelo de riesgo proporcional de Cox, no utiliza β_0, esto es, se sabe que un análisis típico examina la relación entre la distribución de supervivencia y sus covariantes, comúnmente éste análisis exige la especificación del modelo lineal para el logaritmo de la función de riesgo. Por ejemplo un modelo paramétrico basado en la distribución exponencial puede ser escrito como:

$$\ln\ \lambda_i(t) = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x_{ik}, \tag{4.76}$$

que es equivalente a,

$$\lambda_i(t) = e^{\alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x_{ik}}, \tag{4.77}$$

el cual es un modelo lineal para el logaritmo de la función de riesgo, donde i representa el subíndice para cada observación, las $x's$ son los covariantes y la constante α representa un logaritmo del riesgo base, por lo tanto cuando las $x's$ son cero tenemos:

$$\ln \lambda_i(t) = \alpha \quad o \quad \lambda_i(t) = e^{\alpha} \tag{4.78}$$

El modelo de Cox, a diferencia de lo anterior, deja la línea base de la función de riesgo o el riesgo base $\alpha(t) = \ln\ \lambda_0(t)$ sin especificar:

$$\ln\ \lambda_i(t) = \alpha(t) + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x_{ik}, \tag{4.79}$$

lo que es equivalente a,

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) \cdot e^{\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x_{ik}} \tag{4.80}$$

El modelo de Cox puede ser semi-paramétrico debido a que el riesgo base de referencia puede tomar cualquier forma y los covariantes se agregan de forma lineal. Consideremos ahora dos observaciones i e i', las cuales difieren en sus valores covariantes x, con sus polinomios correspondientes $\eta_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x$ y $\eta_i' = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{ik} + ... + \beta_k x_{ik}$, realizando el cociente de las observaciones tenemos:

$$\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_i'(t)} = \frac{\lambda_0(t) \cdot e^{\eta_i}}{\lambda_0(t) \cdot e^{\eta_i'}} = \frac{e^{\eta_i}}{e^{\eta_i'}}, \tag{4.81}$$

el cual es independiente del tiempo y por consecuencia el modelo de Cox es un modelo de riesgo proporcional (Cox, 1972).

- **Estimación de los coeficientes del modelo**

El método de verosimilitud parcial fue introducido por Cox (1972) para estimar los parámetros de regresión β en el modelo de riesgo proporcional para tiempos de falla con posible censura. Cuando los tiempos de falla siguen una distribución continúa, es muy difícil que dos componentes fallen al mismo tiempo, sin embargo, el tiempo medido por lo general sigue una distribución discreta, dado que solo puede tomar valores dentro de un conjunto finito de números. Por lo tanto, la repetición de tiempo de falla puede ocurrir en muchos de los casos, lo cual requiere atención especial (Pham, 2006).

Es importante mencionar que en la estimación de los parámetros del modelo, los valores de las variables independientes pueden ser centrados para incrementar la estabilidad del algoritmo de optimización. Se le llama datos centrados, cuando a la matriz de diseño le restamos su media. Centrar los datos no afecta los coeficientes de regresión, y como consecuencia se pueden obtener mejores resultados debido a la estabilidad que le proporciona al método numérico utilizado en la optimización, además de que el centrado de los datos no afecta las inferencias realizadas acerca de los parámetros estimados.

1. Verosimilitud parcial sin repeticiones

   Supongamos que no existen repeticiones entre los tiempos de falla $t_1, ..., t_N$, donde N denota el orden de los tiempos de falla observados y (j) denota el caso de algún componente que falla en t_j. Supongamos que R_j representa el conjunto de riesgo en el tiempo t_j. $R_j = \{i : X_i \geq t_j\}$. La función de verosimilitud parcial, para el modelo dado, es definida como:

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\exp\left(\beta^T Z_{(j)}\right)}{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T Z_i\right)} \quad , \tag{4.82}$$

por lo tanto, la función de log-verosimilitud está dada por:

$$L(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T Z_{(j)} - \log \left[\sum\nolimits_{ie\Re_i} \exp(\beta^T Z_i) \right] \right\} \tag{4.83}$$

La verosimilitud parcial máxima para estimar los parámetros β, como propuso Cox (1972), es calculada mediante la solución de la ecuación $U(\beta) = 0$, donde:

$$U(\beta) = \frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} \tag{4.84}$$

La matriz de información, definida como la segunda derivada negativa de la función de log-verosimilitud, esta dada por:

$$I(\beta) = -\frac{\partial U(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T Z_i\right) Z_i^{\otimes 2}}{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T Z_i\right)} - \left(\frac{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T Z_i\right) Z_i}{\sum_{i \in R_j} \exp\left(\beta^T Z_i\right)} \right)^{\otimes 2} \right] \tag{4.85}$$

donde $a^{\otimes 2} = aa^T$ para cualquier vector a.

Puede ser demostrado que $\hat{\beta}$ es un estimador consistente de β, y $n\mathrm{I}^{-1}(\hat{\beta})$ es un estimador consistente para la matriz de co-varianzas de $n^{1/2}(\hat{\beta} - \beta)$, donde n es el número de todos los sujetos o componentes, censurados o no censurados (Pham, 2006). Entonces para muestras grandes, $\hat{\beta}$ sigue aproximadamente una distribución Normal con media β y matriz de varianza y co-varianza $\mathrm{I}^{-1}(\hat{\beta})$.

2. Verosimilitud parcial con repeticiones

   Supongamos que existen N distintos tiempos de falla observados $t_1, ..., t_N$ y para cada tiempo $t_j (1 \leq j \leq N)$ existen d_j fallas observadas. Note que D_j representa el conjunto de todos los individuos que fallaron en un mismo tiempo t_j y R_j representa el conjunto de riesgo en el tiempo t_j; $R_j = \{i : X_i \geq t_j\}$. Cuando existe una cantidad considerable de repeticiones en los datos, la estimación de la máxima verosimilitud se vuelve complicada y consume tiempo, por ésta razón se utilizan algunas aproximaciones de la función de verosimilitud parcial. Dos aproximaciones comunes son la

de Breslow y la de Efron. La aproximación de Breslow para datos con repeticiones es la siguiente:

$$L_B(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T \sum\nolimits_{I \in D_j} Z_I - d_j \log \left[\sum\nolimits_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T Z_i) \right] \right\} \tag{4.86}$$

Esta aproximación funciona bien cuando no existe una cantidad grande de repeticiones, en caso contrario, es recomendable la utilización de la aproximación propuesta por Efron:

$$L_B(\beta) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \beta^T \sum\nolimits_{I \in D_j} Z_I - \sum_{k=1}^{d_j} \log \left[\sum\nolimits_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T Z_i) - \frac{(k-1)}{d_j} \sum_{i \in D_j}^{\exp(\beta^T Z_i)} \right] \right\} \tag{4.87}$$

El método de Breslow es más sencillo de utilizar y es además el más popular, sin embargo, la aproximación de Efron es por lo general más exacta. Ambas funciones se reducen a la verosimilitud parcial cuando no existen repeticiones.

3. Estimación de la función de confiabilidad y riesgo

   La función acumulada de riesgo $\hat{\Lambda}_0(t) = \int_0^t \lambda_0(u)du$ puede ser estimada por:

$$\hat{\Lambda}_0 = \sum_{j:t_j \leq t} \frac{\delta_j}{\sum_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T Z_i)}, \tag{4.88}$$

   donde $\delta_j = I(T_j \leq C_j)$. La función $\hat{\Lambda}_0(t)$ es continua creciente a la derecha con saltos en los tiempos de falla observados, y es comúnmente referida al estimador de Breslow.

   En el caso de eventos repetidos, cada uno de los sujetos en una repetición contribuye por si solo a la suma y éste término es el mismo para todos los sujetos que fallaron en un tiempo específico. Este estimador, puede además ser derivado a través de una aproximación del perfil de riesgo.

La función de confiabilidad $S_0(t) = \exp[-\Lambda_0(t)]$ puede ser estimada mediante $\hat{S}_0(t) = \exp[-\hat{\Lambda}_0(t)]$. Por lo tanto, la función de confiabilidad estimada para cada individuo con un valor de covariante Z es dada por:

$$\hat{S}_0(t|z) = \exp\left[-\hat{\Lambda}_0(t)e^{\hat{\beta}^T Z}\right] \tag{4.89}$$

4.4. Método de Newton-Raphson

El método fue escrito por Isaac Newton en 1669, en un trabajo de nombre: "*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*" y publicado en 1711 por William Jones en: "*De metodis infinitarum*". Además, fue traducido y publicado por John Colson en 1736, como método de fluxiones. El método es conocido como "*fluxionum et serierum*" obtenido a través de la expansión de series de Taylor para n variables alrededor de una raíz con respecto a $\hat{x} = \hat{x}_j$ (Sun et. al. 2006).

La idea básica del método de Newton para la optimización de funciones sin restricciones es usar iterativamente la aproximación cuadrática $q^{(k)}$ con la función objetivo f en la iteración x_k y minimizar la aproximación $q^{(k)}$. Sea $f : R^n \to R$ continuamente y doblemente diferenciable $x_k \in R^n$, y el Hessiano $\nabla^2 f(x_k)$ positivo definido. Modelamos f en el punto actual x_k mediante la aproximación cuadrática $q^{(k)}$,

$$f(x_k + s) \approx q^{(k)}(s) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(x_k) s, \tag{4.90}$$

donde $s = x - x_k$. Minimizando $q^{(k)}(s)$ obtenemos

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k), \tag{4.91}$$

la cual representa la fórmula de Newton. Siendo

$$G_k = \nabla^2 f(x_k),\ g_k = \nabla f(x_k), \tag{4.92}$$

reescribimos (4.92) como:

$$x_{k+1} = x_k - G_k^{-1} g_k, \tag{4.93}$$

donde $s_k = x_{k+1} - x_k = -G_k^{-1} g_k$, representa la dirección de Newton.

Claramente, la dirección de Newton es una dirección descendente dado que satisface $g_k^T s_k = -g_k^T G_k^{-1} g_k < 0$ y G_k es una matriz positiva definida.

Para la función cuadrática positiva definida, el método de Newton puede encontrar el mínimo en una sola iteración. Sin embargo, para una función general no cuadrática no es seguro que el método pueda encontrar el minimizador con iteraciones finitas. Afortunadamente, dado que la función objetivo es aproximada a una función cuadrática, si el punto inicial esta cerca del mínimo o máximo, el método converge rápidamente. El siguiente teorema muestra la convergencia local y la convergencia cuadrática del método de Newton.

Teorema 1. (Convergencia del método de Newton). Sea $f \in C^2$ y x_k está lo suficientemente cerca de la solución x^* del problema de maximización o minimización con $g(x^*) = 0$. Si el Hessiano $G(x^*)$ es una matriz positiva definida y $G(x^*)$ satisface la condición de Lipschitz:

$$|G_{ij}(x) - G_{ij}(y)| < \beta \|x - y\| \tag{4.94}$$

donde $G_{ij}(x)$ es el elemento $(i,j)G(x)$, entonces para todo k, la iteración de Newton (4.93) esta bien definida; la secuencia generada $\{x_k\}$ converge a x^* de forma cuadrática.

Prueba. Sea $h_k = x_k - x^*$. De la fórmula de Taylor se muestra que: $0 = g(x^*) = g_k - G_k h_k + \mathrm{O}\left(\|h_k\|^2\right)$. Dado que $f \in C^2$, x_k está lo suficientemente cerca de x^*, y $G(x)$ es positiva definida, es razonable asumir que x_k esta en la vecindad de x^*, $G(x)$ positiva definida, G_k^{-1} en el limite superior. Por lo tanto, la $k-$é*sima* iteración de Newton existe. Multiplicando G_k^{-1} obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= G_k^{-1} g_k - h_k + \mathrm{O}\left(\|h_k\|^2\right) \\ &= -s_k - h_k + \mathrm{O}\left(\|h_k\|^2\right) \\ &= -h_{k+1} + \mathrm{O}\left(\|h_k\|^2\right). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Por definición en O(.), existe una constante C tal que:

$$\|h_{k+1}\| \leq C \|h_k\|^2$$

$$\|h_{k+1}\| \leq C \|h_k\|^2 \tag{4.96}$$

Si $x_k \in \Omega = \{x | \|h\| \leq \gamma/C, h = x - x^*, \gamma \in (0,1)\}$ entonces:

$$\|h_{k+1}\| \leq \gamma \|h_k\| \leq \gamma^2/C < \gamma/C \quad , \tag{4.97}$$

y por consecuencia $x_{k+1} \in \Omega$. Por inducción en k, la iteración de Newton esta bien definida para toda k, y $\|h_k\| \to 0$ conforme $k \to \infty$ y por tanto, la iteración converge. Además la ecuación (4.97) muestra que la convergencia de la iteración es cuadrática.

Cabe destacar que el método de Newton es un método local. Cuando el punto de inicio está alejado de la solución, no es seguro que G_k sea positiva definida y la dirección de Newton d_k es descendente. Por lo tanto la convergencia no está garantizada. La convergencia hacia una solución está asegurada por el teorema de Newton-Kantorovich (Nazareth et. al. 2003), si se cumplen ciertos requisitos. De éstos, los más importantes son que el punto inicial debe estar suficientemente cerca de la solución y dentro de un determinado recinto, donde $f(x)$ sea continuamente diferenciable.

Con el fin de intentar mejorar la convergencia del método de Newton, existen en la bibliografía los métodos de Newton modificados, basados algunos de ellos en criterios de optimización. Estos métodos aún suponiendo una mejora respecto al método de Newton, no aseguran la convergencia global a la solución correcta del problema porque pueden converger hacia mínimos locales (Nazareth et. al. 2003).

4.5. Diagnósticos de Colinealidad

Si no hay relación lineal entre los regresores (en la matriz de diseño), se dice que son ortogonales; algunas veces la falta de ortogonalidad no es grave, sin embargo, en algunos casos los regresores tienen una relación lineal casi perfecta, por lo que las inferencias basadas en el modelo de regresión pueden ser engañosas o erróneas. Cuando hay dependencia casi lineal entre los regresores, se dice que existe colinealidad o multicolinealidad (Montgomery et. al. 2006).

Los efectos que produce la colinealidad entre las variables explicatorias son: a) Estimaciones inestables del vector de parámetros, b) varianzas muy grandes de los coeficientes estimados y, c) pérdida de potencia de las pruebas estadísticas. Esto justifica la importancia de detectar la presencia de colinealidad y la determinación de las variables involucradas en la relación colineal (Godínez y Ramirez, 2003).

- **Colinealidad exacta**

Afirmamos que existe un problema de colinealidad exacta, cuando una o más variables, son una combinación lineal de otras, es decir, existe un coeficiente de determinación entre estas dos variables de 1. Esto provoca que la matriz de varianzas y covarianzas tenga determinante $\det = 0$, y sea singular, por lo tanto su inversa no existe.

- **Colinealidad aproximada**

Existe colinealidad aproximada, cuando una o más variables, no son exactamente una combinación lineal de la otra, pero existe un coeficiente de determinación entre estas variables muy cercano al uno y por lo tanto $\det \cong 0$, es aproximado a cero.

- **Fuentes de colinealidad**

Algunas fuentes de colinealidad más comunes son:

1. El Método de recolección de datos: Esto es cuando la persona o el analista muestrea solo un subespacio de la región de interés o de los regresores definidos.

2. Restricciones en el modelo: Se presentan en problemas donde intervienen procesos de producción o químicos, cuando los regresores son componentes de un producto y éstos suman una constante.

3. Especificación del modelo: Al agregar términos polinomiales a un modelo de regresión se produce deterioramiento en la matriz de covarianzas.

4. Un modelo sobre definido: Cuando tiene más variables regresoras que observaciones (Montgomery et al., 2006).

- **Diagnósticos de colinealidad**

1. Analizar las correlaciones entre todas las parejas de variables para detectar las que son bastante altas o cercanas a 1, es decir la matriz de varianzas y covarianzas en forma de correlación.

2. Verificar si hay coeficientes de regresión con valores muy grandes o de signo opuesto a lo que se esperaba que ocurriera.

3. Considerar que debido a la colinealidad, la varianza de los estimadores de β_j, provenientes de la matriz de varianzas y covarianzas, serán grandes, lo cual incrementará el ancho de los intervalos de confianza para el contraste de hipótesis y como consecuencia la probabilidad de cometer un error aumentará.

4. Si el VIF es mayor que 10, entonces puede haber colinealidad. El VIF esta dado por:

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2} \tag{4.98}$$

el cual es llamado el $j-$é$simo$ factor de inflación de la varianza. Si R_j^2 es cercano a 1, entonces la varianza de $\hat{\beta}_j$ aumentará grandemente. El VIF representa el incremento en la varianza debido a la presencia de colinealidad. Los VIF son los elementos que están en la diagonal de la inversa de la matriz de correlaciones.

5. Usar el número condición, lo cual se realiza estimando los eigenvalores correspondientes a la matriz de covarianza, esta medida de colinealidad se define como:

$$k_c = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{4.99}$$

donde λ representa los eigenvalores de la matriz de covarianza. Si el número de condición es menor a 100, no hay problema, si esta entre 100 y 1,000 existe colinealidad, pero si es mayor a 1,000 la colinealidad es grave.

6. Otra forma de diagnostico es utilizando el determinante de la matriz de correlación digamos C, ya que el intervalo de esta matriz esta entre $0 \leq |C| \leq 1$. Si $C = 1$, los regresores son ortogonales, por otro lado, si tiende a $C \to 0$ los problemas se agravan y si $C = 0$ hay una dependencia lineal, sin embargo, este método no proporciona información sobre el origen de la colinealidad.

Lesaffre y Marx (1993), mencionan que si la matriz de covarianzas (o de información para el caso de modelos no lineales), está mal condicionada, es recomendable distinguir entre la colinealidad debida a la variables independientes y la colinealidad debida a la dependencia entre los parámetros a la cual le nombran Colinealidad-ML; propone utilizar el número de condición estandarizado para diagnosticar el problema de colinealidad. Menciona que es posible distinguir la causa de la colinealidad comparando los números de condición correspondientes; por ejemplo si $Kx > 5$, entonces la colinealidad es debida a las variables independientes.

Weissfeld (1989), utiliza los índices de condición y descomposición de varianzas en los modelos de riesgo proporcional de Cox, Exponencial, Weibull y Log-Normal, en su trabajo analiza el efecto de la colinealidad en los números de condición.

Lee y Weissfeld (1996) realizaron el análisis del modelo de Cox en presencia de censura y colinealidad utilizando índices de condición escalados para covariables fijas y covariables dependientes del tiempo. Mackinnon y Puterman (1989) mencionan que el diagnostico para el problema de colinealidad en modelos lineales generalizados debe realizarse utilizando la matriz de información.

4.6. Regresión Ridge

El comportamiento de la variable aleatoria Y, analizada a través de un diseño experimental, generalmente, se representa a través de un modelo o polinomio empírico, ya sea lineal, o cuadrático y rara vez cúbico, dependiendo del comportamiento de los datos, para estimar la respuesta en un punto de interés (Montgomery, 2006).

La estimación de los $\hat{\beta}_j$ del polinomio, si los factores de inflación de la varianza (VIF) son menores de 10, se realiza mediante Mínimos Cuadrados dado por:

$$\hat{\beta}_j = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \tag{4.100}$$

Pero si los VIF son mayores de 10, la estimación de los $\hat{\beta}_j$ se realiza a través del modelo de Regresión Ridge dado por (Piña, 2005):

$$\hat{\beta}_j = \left(X^T X + kI\right)^{-1} X^T Y \tag{4.101}$$

El método de Ridge, es un método para detectar la colinealidad dentro de un modelo de regresión $Y = X^T\beta + \varepsilon$. El método fue propuesto por Hoerl y Kennard (1970) y es usado para trabajar con modelos que presentan sesgo.

La idea del método es simple y consiste en que dado que la matriz $X^T X$ es altamente condicionada o cercana a singular, es posible agregar constantes positivas a los elementos de la diagonal, para asegurar que la matriz resultante, no sea altamente condicionada.

Dado que el objetivo, es determinar un modelo polinomial cuya varianza de predicción sea mínima, utilizamos la función del cuadrado medio de la predicción de Mínimos Cuadrados, para determinar el valor de la constante k dada por (4.102):

$$k = \frac{P\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}(X^t X)\hat{\beta}} \tag{4.102}$$

4.7. API RP 581 Inspección Basada en Riesgo

El documento API RP 2008 (por sus siglas en inglés American Institute Petroleum Recommended Practice), provee procedimientos cuantitativos para establecer programas de inspección usando el riesgo basado en métodos para equipos presurizados, incluyendo válvulas de presión, tubería, tanques, dispositivos de alivio de presión e intercambiadores de calor. El API RP 580 proporciona una guía para el desarrollo de un programa de inspección basada en riesgo para equipos en refinerías e industrias químicas y petroquímicas (API 581, 2008).

- **Introducción al API 581**

El cálculo del riesgo en la Inspección Basada en Riesgo (API RBI) involucra la determinación de la probabilidad de falla combinada con la consecuencia de la falla. La falla en API RBI es definida como una pérdida de contención del límite de presión trayendo como consecuencia contaminación de la atmósfera o el rompimiento de un componente presurizado.

Conforme el daño, durante la operación en servicio, se va acumulando en el componente presurizado, el riesgo incrementa. Si en algún punto, una tolerancia de riesgo es excedida, se recomienda una inspección lo suficientemente efectiva para cuantificar de forma adecuada el estado del daño del componente. La inspección por si sola no reduce el riesgo; sin embargo, reduce la incertidumbre y permite una cuantificación mejor del daño presente en el componente.

- **Introducción al API 581**

Una vez que el riesgo ha sido identificado, en muchos casos se utilizan alternativas para reducirlo. Por lo tanto, se integra un programa de manejo de riesgo. En este documento, la necesidad de evaluar el riesgo surge de diferentes escenarios de riesgo; riesgo de los empleados, riesgo de la comunidad, riesgo de interrupción del negocio (paro del proceso) y riesgo del daño ambiental, entre otros. El API RBI permite cualquier combinación de estos tipos de riesgo para tomar decisiones acerca de cuando, donde y como inspeccionar el equipo.

- **Organización del API 581**

La metodología API RBI es presentada en tres partes:

a) Parte 1.- Plan de inspección usando API RBI.

b) Parte 2.- Estimación de probabilidad de falla en API RBI.

c) Parte 3.- Modelo de consecuencias en API RBI.

La probabilidad de falla esta basada en el tipo de componente y el mecanismo de daño, enfocado en las características del fluido en proceso, condiciones de diseño, construcción de los materiales y el código original de construcción (API 581, 2008).

Uno de los temas principales es la aplicación de confiabilidad específicamente en el API 581. Para el cálculo de la probabilidad de falla de los componentes incluidos en tal documento, específicamente en los módulos de válvulas de seguridad e intercambiadores de calor, se utiliza en particular el modelo Weibull.

Considerando que el modelo Weibull es el más utilizado debido a su interpretación directa en campo, existen muchas herramientas y aplicaciones desarrolladas tomando como base el análisis Weibull, (API RBI como caso específico), por lo que existe un área de oportunidad en el hecho de incluir otros modelos y herramientas específicas para el calculo de la probabilidad de falla de componentes en el API 581, cuando el modelo Weibull no representa los datos de forma adecuada.

Si bien es cierto que el modelo Weibull es de utilidad en muchos problemas de ingeniería, existen casos en los que no es posible utilizarlo, para estos casos es necesario trabajar en la selección de algunos modelos que mejor representen la información de los componentes en cuestión; en el caso de datos de tiempos de vida se utilizan modelos tales como el Exponencial, Log-Normal, Weibull y Gamma.

Además, es posible notar que la probabilidad de falla esta basada en las características del fluido en proceso, condiciones de diseño, condiciones de proceso, construcción de los materiales y el código original de construcción, por lo que se hace necesario encontrar modelos estadísticos que se ajusten a datos de tiempo de vida, los cuales incluyan factores operacionales representados mediante covariables para determinar los efectos que el ambiente operacional tiene sobre la confiabilidad del componente.

4.8. Métodos de Remuestreo

Los métodos de remuestreo, bootstrap, jackknife y validación cruzada son tres estadísticas que implican reusar la información con la que se cuenta; en cada caso, una muestra única de observaciones es considerada como muchas muestras con el mismo proceso de estimación. Sin embargo, el propósito de reusar la información es diferente para cada método.

El método bootstrap se utiliza para evaluar la varianza de un estimador, jackknife es un método para reducir el sesgo de un estimador y evaluar la varianza del mismo; la validación cruzada es un método utilizado para evaluar el error implícito en la realización de predicciones.

Cada uno de los métodos mencionados anteriormente, involucra aplicar un procedimiento estadístico de forma repetitiva, sobre la muestra de datos o una parte modificada de ella, lo cual representa un trabajo computacional intensivo.

Dado lo anterior, en la presente disertación se utilizara solo el método de validación cruzada debido al interés por validar el modelo propuesto para la estimación de probabilidad de falla incluyendo el efecto de factores operacionales; tal modelo realizará predicciones tanto de la vida útil del componente en cuestión así como de su confiabilidad.

4.8.1. Validación Cruzada

La validación cruzada es un método para evaluar el error de predicción cuando es ajustada una función de dos o más variables. Aunque el propósito y la aplicación de éste método son diferentes al método jackknife, también consiste en dejar una observación fuera del modelo y calcular el error o diferencia entre el valor observado y el valor predicho (Kohavi, 1995).

- **Método de reducción (holdout)**

Es el modo más simple de validación cruzada. La muestra completa es separada en dos conjuntos de datos, llamados conjunto de entrenamiento y conjunto de prueba, respectivamente. El modelo aproximador es ajustado y utiliza solo el conjunto de datos de entrenamiento, después se predicen los valores del conjunto de prueba y se estima el error de predicción.

Este método es preferible con respecto al método de los residuales y no requiere un trabajo computacional intensivo. Sin embargo, su evaluación puede tener alta varianza, la cual, puede depender en gran manera de los datos contenidos tanto, en el conjunto de entrenamiento, como en el conjunto de prueba. Por lo tanto, la evaluación puede ser significativamente diferente dependiendo de la división de conjuntos realizada.

- **Validación cruzada de K subconjuntos** ($K - fold$)

Este método representa una forma de mejorar el método de reducción mencionado en el punto anterior. La muestra completa es dividida en K subconjuntos, y el método de reducción y ajuste es repetido K veces. En cada ciclo de ajuste, uno de los K subconjuntos es usado como conjunto de prueba y los otros $K - 1$ subconjuntos son utilizados como conjunto de entrenamiento, para estimar el error de predicción. Una de las ventajas de éste método es que afecta en menor proporción la forma en que se dividen la muestra completa de datos (Efron, 1983).

Cada dato de la muestra es utilizado exactamente una vez en el conjunto de prueba y aparece en el conjunto de entrenamiento $K-1$ veces. La varianza del resultado obtenido se reduce conforme K incrementa. La principal desventaja de éste método es que el algoritmo de entrenamiento debe ser utilizado K veces, lo que significa un trabajo computacional intensivo.

- **Validación cruzada con reducción de un dato** ($Leave - one - out$)

El método es igual a la validación cruzada de K subconjuntos llevada a un extremo lógico, con $K = N$, donde N representa el numero de datos en la muestra total. Esto

significa que, el ajuste del modelo es realizado N veces con la muestra de entrenamiento omitiendo solo un valor de la muestra en cada ajuste. Para realizar la estimación del error, se realiza la predicción del punto excluido en el ajuste para cada caso.

La evaluación del error dada mediante el uso de éste método es buena, sin embargo tiene el inconveniente de ser costoso computacionalmente, por otra parte; tiene la ventaja de ser la mejor forma de evaluar modelos de predicción. Para evaluar la predicción, puede ser usado el estadístico de predicción ($PRESS$) o la raíz del cuadrado medio del error ($RMSPE$) entre otros (Geisser 1993).

Sea $x_j^{(N-1)} = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_N)$ y sea $z_j^{(N-1)}$ representada de forma similar, donde la $k-$é$sima$ predicción de x_j es estimada mediante:

$$\hat{x}_{jk} = \hat{x}_{jk}\left(x_j^{(N-1)}, z_j^{(N-1)}, z_j\right) \tag{4.103}$$

realizando de forma repetitiva desde $j = 1, ..., N$. Después, se estima para el $k-$é$simo$ predictor $r_{jk} = \hat{x}_{jk} - x_j$ para $j = 1, ..., N$, y se compara el r_{kj} para los K modelos ajustados. Es importante hacer notar que en el caso de la validación, los residuales son funcionalmente dependientes debido al uso de la misma función de predicción, además la dependencia funcional es presentada debido al uso repetitivo de los datos.

El interés principal del método se enfoca en la predicción de observaciones futuras o en un conjunto de nuevas observaciones. El procedimiento general es como sigue (Geisser 1993):

1. Una función de predicción para valores futuros de x o un conjunto de valores para un z dado es:

$$x\left(x^{(N)}, z^{(N)}, z; \omega\right) \quad \omega \in \Omega \tag{4.104}$$

2. Sea $P_i^{(N-n)}$ la representación de la $i-$é$sima$ partición de la muestra original en $N-n$ observaciones consideradas y n observaciones omitidas para $0 \leq n \leq M$, donde M es el último número, tal que la función de predicción puede ser formada con $N-M$

observaciones. El conjunto de observaciones $x^{(N)}$ y el conjunto concomitante $z^{(N)}$ son divididos, tal que:

$$P_i^{(N-n)} = \left(x_{ir}^{(N-n)}, z_{ir}^{(N-n)}, x_{i0}^{(n)}, z_{i0}^{(n)}\right), \tag{4.105}$$

es un elemento de un conjunto de particiones Γ con respecto a un esquema S de observaciones omitidas, donde (4.105) representa $N-n$ observaciones consideradas en el ajuste y n datos omitidos, de modo que $\Gamma = \Gamma\,(N, n, S)$, siendo $P =$ el número de particiones de Γ.

3. Aplicar la función de predicción a las observaciones omitidas, para cada partición P_i y predecir $x_{i0}^{(n)}$ dado $z_{i0}^{(n)}$:

$$\tilde{x}_i^{(n)}(\omega) = \tilde{x}_{i0}\left(x_{ir}^{(N-n)}, z_{ir}^{(N-n)}, z_{i0}^{(n)}, \omega\right) \tag{4.106}$$

4. Definir una medición de la discrepancia o función de criterio, la cual puede ser como sigue:

$$D_{N,n}(\omega) = (Pn)^{-1} \sum_{P_i \in \Gamma} d(x_{i0}^{(n)}, \tilde{x}_{i0}^{(n)}(\omega)) \tag{4.107}$$

donde $d(a, b)$ es una medida de la discrepancia entre a y b.

Para la evaluación de la predicción, se usará el estadístico de predicción ($PRESS$). Si definimos a $y_i = (x_{i0}^{(n)}, z_{i0}^{(n)})$ como el valor omitido de la muestra completa y a $\hat{y}_i = \tilde{x}_i^{(n)}(\omega)$ es decir, la predicción de $x_{i0}^{(n)}$ dado $z_{i0}^{(n)}$, los residuales $PRESS$ se definen como $e_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)}$.

Allen (1971, 1974), sugiere el uso de la suma de cuadrados del error de predicción (es decir el estadístico $PRESS$), definida como la suma de los residuales $PRESS$ al cuadrado, la cual representa una medida de la calidad del modelo. El estadístico $PRESS$ se estima como:

$$PRESS = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \hat{y}_{(i)}\right]^2 \tag{4.108}$$

Se considera que $PRESS$ es una medida de lo bien que funciona un modelo para predecir nuevos datos. Lo deseable es tener un modelo con valor pequeño de $PRESS$ (Montgomery, 2008). Con el estadístico $PRESS$ se puede calcular un estadístico parecido a la R^2 para predicción, estimado por:

$$R^2_{PRESS} = 1 - \frac{PRESS}{SS_T} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \hat{y}_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \bar{y}\right]^2} \tag{4.109}$$

Donde $\bar{y}$ representa la media muestral calculada mediante la ecuación (4.110), considerando las N observaciones contenidas en la muestra total.

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \tag{4.110}$$

Capítulo 5

Metodología

Considerando el problema planteado en el capitulo II y la revisión de literatura referente a los modelos analizados en capítulos anteriores, en este capítulo se puntualiza la metodología propuesta para la incorporación de los efectos de factores operacionales, incluyendo una posible solución para el problema de colinealidad.

Debido al impacto que tienen las deficiencias mostradas sobre la estimación de la probabilidad de falla en los modelos mostrados y considerando los avances encontrados en el tema, la metodología propuesta se enfoca de cierta forma en el análisis y solución de los problemas planteados. Note que, tal estimación es determinante para la aplicación de la Inspección Basada en Riego (RBI) así como la elaboración de programas de inspección, planes de mantenimiento y prevención de riesgos entre otros, lo anterior cuando se requiere considerar factores de operación en la estimación de la probabilidad de falla; por esta razón se realizó un análisis profundo del modelo o modelos convencionales (ver capítulo II), para determinar sus posibles fallas y proponer un modelo incluyendo las posibles mejoras.

5.1. Metodología Propuesta

Como ya se mostró, la incorporación de los efectos del medio ambiente operacional que influyen en la estimación de la probabilidad de falla es importante, ya que el $Riesgo = P_i \cdot C_i$ calculado con la probabilidad estimada, sirve de base para establecer los planes de

mantenimiento en RBI.

Notablemente, la función de verosimilitud correspondiente al modelo utilizado para incluir los factores operacionales en la estimación de la probabilidad de falla, se ve afectada severamente por la colinealidad contenida en la matriz de diseño y/o en la matriz de información, causando que los parámetros estimados sean inestables. En consecuencia, la inestabilidad de los coeficientes, afecta directamente la estimación del riesgo utilizado para la aplicación de RBI.

Dadas las condiciones anteriores, se propone una metodología para la disminución del efecto que la colinealidad tiene sobre la probabilidad de falla estimada, considerando factores operacionales (el medio ambiente operacional) en la estimación.

5.1.1. Pasos Generales de la Metodología Propuesta

De lo expuesto con anterioridad y con el objetivo principal de dar estabilidad a la estimación de los parámetros $\hat{\beta}_j$ del modelo incluyendo factores operacionales, se detalla la metodología propuesta, dando por hecho que la recolección de datos se realizó de manera adecuada y considerando centrar los datos para estabilizar la estimación (ver capítulo IV, sección 4.3).

1. **Generar la función de verosimilitud**

   La función de verosimilitud se construye (ver sección 4.2 y 4.3 del capítulo IV) en relación al modelo que se utilizará (paramétrico o semi-paramétrico) para la estimación de la probabilidad de falla incluyendo covariables.

2. **Optimizar la función para estimar parámetros del modelo**

   Estimar los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud; utilizar el método numérico Newton-Raphson (ver sección 4.4, capitulo IV) para la optimización de la función de log-verosimilitud (ecuaciones (4.66), (4.83)).

3. **Estimar el Hessiano**

Estimar la matriz Hessiano evaluada en los parámetros $H(\hat{\beta}_j)$ donde la inversa del Hessiano representa la matriz de información observada $I^{-1}(\hat{\beta}_j)$ (dada por (4.42), (4.85)) correspondiente a los parámetros estimados.

4. **Calcular el número de condición k_c**

   El número de condición k_c de la matriz $H(\hat{\beta}_j)$, se estima mediante (4.99) donde, λ_{max} representa el eigenvalor mayor y λ_{min} el eigenvalor menor correspondientes a la matriz $H(\hat{\beta}_j)$. En este caso, si k_c es menor a 100, no existe colinealidad, si k_c es mayor a 100 pero menor a 1000, existe colinealidad de moderada a fuerte, si k_c es mayor a 1000 existe colinealidad severa.

5. **Sumar un valor k a la matriz Hessiano $H(\hat{\beta}_j)$**

   El valor k para el modelo se estima mediante (5.1), (ver Apéndice I, sección A2):

$$k = \frac{P_\beta}{\hat{\beta}^T(X^TX)\hat{\beta}}, \tag{5.1}$$

   donde P_β representa la cantidad de parámetros utilizados en el modelo. Una vez calculado el valor k, se le suma al Hessiano estimado en el paso 3 $(H + Ik)$; a esta matriz la denominaremos Hk.

6. **Definir la matriz aumentada Sk para estimar los nuevos $\hat{\beta}_R$**

   La matriz aumentada para el modelo será (ver Apéndice I, sección A1):

$$Sk = \begin{bmatrix} SST & H\beta \\ (H\beta)^T & Hk \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

7. **Estimar la inversa de la matriz Sk y los nuevos parámetros $\hat{\beta}_R$**

   Aplicando la inversa de una matriz particionada (dada en el Apéndice I, sección A1.2), obtendremos Sk^{-1}, por lo tanto, los nuevos $\hat{\beta}_R$ estarán dados por la ecuación (5.3) (ver Apéndice I, sección A3):

$$\hat{\beta}_{Rj} = -\frac{Sk^{-1}_{1j}}{Sk^{-1}_{11}} \qquad para\ j = 2, 3, ..., p_\beta \tag{5.3}$$

8. **Realizar pruebas de hipótesis a los parámetros estimados $\hat{\beta}_R$**

   El método comúnmente utilizado para realizar las pruebas de significancia a los parámetros estimados es la Prueba de Wald (capítulo 4, sección 4.1.4), en la cual se utilizará el pseudo error estándar dado por la ecuación (5.4) (ver Apéndice I, sección A4):

$$se = \left[diag\left(Hk^{-1}\right)\right]^{1/2} \tag{5.4}$$

9. **Estimar la probabilidad de falla P_i**

   La estimación de la probabilidad de falla, la tasa de falla y la confiabilidad, se realiza dependiendo del modelo utilizado, es decir, si el modelo es paramétrico simplemente se reemplazan los parámetros estimados en las funciones paramétricas de probabilidad (4.70) y tasa de fallas (4.69) correspondientes al modelo, y se realiza la estimación incluyendo los covariables.

   Por otro lado, si el modelo es semi-paramétrico, es decir, la función de riesgo base no tiene una forma específica, existen algunos métodos para la estimación del riesgo, entre los cuales destaca el propuesto por Breslow (1972) y el propuesto por Kalbfleich y Prentice (1980), los cuales se muestran en el Apéndice I, sección A5.

Capítulo 6

Aplicación y Validación

Este capítulo tiene como propósito mostrar algunas aplicaciones de la metodología propuesta (incluyendo factores operacionales), realizando una validación de los modelos ajustados en casos particulares, mediante una técnica de Validación Cruzada. Es conveniente mencionar que además de mostrar los modelos para incluir los efectos de factores operacionales; se incluye la aplicación de la probabilidad de falla y las consecuencias para la estimación del riesgo en el API RBI 581. Adicionalmente, se presentan los resultados de la aplicación, los cuales, se validarán mediante el uso de la técnica de Validación Cruzada mostrada en el capítulo IV, sección 4.8.1.

6.1. Aplicación de la Metodología Propuesta

Para la aplicación de la metodología propuesta se presentan tres casos particulares, en el primer caso se presentan datos de tiempos de vida de intercambiadores de calor (API 581, 2008) suponiendo algunas condiciones de operación. Para el segundo caso se utilizaron los tiempos de vida de un dado utilizado en una máquina de inserción de terminales, presentados en una disertación para la obtención del grado de maestría (Molina, 2005). Por ultimo, se consideraron los datos analizados por Merrick, Soyer y Mazzuchi (2003), relacionados con la vida de la herramienta de corte en un proceso de maquinado.

6.1.1. Caso 1: Intercambiadores de Calor

El API 581 supone que todos los intercambiadores de calor operan bajo condiciones de operación similares. Sin embargo, no siempre se cumple tal supuesto en campo, y por lo tanto, la estimación de la probabilidad de falla se ve afectada por este hecho. Una forma adecuada de estimar la probabilidad de falla considerando el efecto de las condiciones de operación, es mediante la utilización del modelo propuesto. La tabla 6.1 muestra información hipotética para la aplicación del modelo, donde X_1 : Contenido de Azufre (%), X_2 : Temperatura ($^\circ$F) y X_3 : Tipo de Fluido.

Tabla 6.1: Intercambiadores de Calor

Factores				Respuesta	
Intercambiador	Azufre	Temp.	Fluido	Servicio en Años	Falla Reportada
191-X-25A-T1	8%	400	Crudo Pesado	25	Si
191-X-25A-T2	2%	300	Crudo Ligero	20	Si
191-X-25A-T3	4%	310	Crudo Ligero	19	No
E101-A-T1	6%	480	Crudo Pesado	7	Si
E322-A-T1	10%	500	Crudo Pesado	9	Si
E322-A-T2	5%	328	Crudo Ligero	18	No
HE-115-T1	9%	505	Crudo Pesado	10	Si
HE-115-T2	4%	455	Crudo Pesado	12	Si
PR6419-T1	6%	315	Crudo Ligero	22	No

Se utilizó la prueba de bondad de ajuste Anderson-Darling para datos censurados (ver Capítulo IV, sección 4.1.2), donde el estadístico estimado correspondiente a la distribución Weibull fue ${}_pA_n^2 = 0.3074$, menor que el valor de tablas ${}_2A_{r,n}^2 = 1.7429$; por lo tanto es factible utilizar el modelo Weibull (Capitulo IV, apartado 4.2). Con el fin de ilustrar la aplicación del modelo propuesto, se presentan los resultados siguiendo la secuencia de pasos generales, detallada en el capítulo V.

- **Estimar los parámetros del modelo**

Como paso inicial, se determinó la función de log-verosimilitud dada por (4.72) para el modelo de riesgo proporcional Weibull, considerando los datos de la tabla 6.1. Posteriormente, se optimizó la función resultante mediante el método de Newton-Raphson mostrado en la sección 4.4 del capitulo IV. Los coeficientes correspondientes al ajuste inicial, se muestran en la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Resultados del ajuste para Intercambiadores

Coeficientes				Valor-P	Error Est.	Inferior	Superior	Indicadores de Ajuste	
Inicial		Propuesto							
$\hat{\alpha}_0$	-37.023	$\hat{\alpha}_{R0}$	-25.064	0.0079	9.4382	-43.5634	-6.5658	$Lk =$	-15.724
$\hat{\beta}_1$	-0.761	$\hat{\beta}_{R1}$	-0.519	0.0494	0.2643	-1.0374	-0.0013	$R^2 =$	0.99
$\hat{\beta}_2$	0.133	$\hat{\beta}_{R2}$	0.092	0.0068	0.0340	0.0254	0.1588	$k_c =$	9.85e+006
$\hat{\beta}_3$	-11.826	$\hat{\beta}_{R3}$	-8.129	0.0150	3.3413	-14.6785	-1.5805	$k =$	0.002
$\hat{\beta}_W$	13.588	$\hat{\beta}_{RW}$	9.235	0.0165	3.4365	2.5003	15.9713		

- **Estimar el Hessiano**

La matriz Hessiano estimada mediante la ecuación (4.42) para la función de log-verosimilitud es:

$$H = \begin{bmatrix} 9.012 & 0.011 & 0.737 & 0.003 & 24.740 \\ 0.011 & 53.090 & 1187.700 & 6.305 & -2.897 \\ 0.737 & 1187.700 & 61187.000 & 341.530 & -220.630 \\ 0.003 & 6.305 & 341.530 & 2.225 & -0.986 \\ 24.740 & -2.897 & -220.630 & -0.986 & 69.069 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

- **Calcular el número de condición k_c**

Los eigenvalores correspondientes a la matriz Hessiano estimada son $\lambda_j = [61213, 77.281, 29.999, 0.0062121, 0.34012]$ y por consecuencia, el número de condición calculado mediante (4.99) es $k_c = 61213/0.0062 = 9.85e + 006$.

- **Obtener la matriz Hk**

Se puede observar que, como el número de condición k_c es grande, es necesario utilizar el método propuesto con un valor de k específico. El valor k calculado mediante (5.1) es $k = 0.0029485$. Por lo tanto, la matriz Hk es:

$$Hk = \begin{bmatrix} 9.015 & 0.011 & 0.737 & 0.003 & 24.740 \\ 0.011 & 53.093 & 1187.700 & 6.305 & -2.897 \\ 0.737 & 1187.700 & 61187.000 & 341.530 & -220.630 \\ 0.003 & 6.305 & 341.530 & 2.228 & -0.986 \\ 24.740 & -2.897 & -220.630 & -0.986 & 69.072 \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

y su inversa Hk^{-1}:

$$Hk^{-1} = \begin{bmatrix} 89.079 & 1.795 & -0.302 & 26.710 & -32.414 \\ 1.795 & 0.070 & -0.007 & 0.573 & -0.654 \\ -0.302 & -0.007 & 0.001 & -0.109 & 0.110 \\ 26.710 & 0.573 & -0.109 & 11.164 & -9.731 \\ -32.414 & -0.654 & 0.110 & -9.731 & 11.809 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

- **Definir la matriz aumentada Sk y Sk^{-1}para estimar los nuevos $\hat{\beta}_R$**

La matriz aumentada Sk obtenida mediante la ecuación (5.2) es:

$$Sk = \begin{bmatrix} 11.999 & 2.574 & 3.540 & 186.080 & 0.874 & 7.031 \\ 2.574 & 9.015 & 0.011 & 0.737 & 0.003 & 24.740 \\ 3.540 & 0.011 & 53.093 & 1187.700 & 6.305 & -2.897 \\ 186.080 & 0.737 & 1187.700 & 61187.000 & 341.530 & -220.630 \\ 0.874 & 0.003 & 6.305 & 341.530 & 2.228 & -0.986 \\ 7.031 & 24.740 & -2.897 & -220.630 & -0.986 & 69.072 \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

por lo tanto, la matriz Sk^{-1} calculada es:

$$Sk^{-1} = \begin{bmatrix} 0.228 & 5.708 & 0.118 & -0.021 & 1.852 & -2.103 \\ 5.708 & 232.160 & 4.759 & -0.828 & 73.117 & -85.136 \\ 0.118 & 4.759 & 0.131 & -0.018 & 1.534 & -1.746 \\ -0.021 & -0.828 & -0.018 & 0.003 & -0.279 & 0.304 \\ 1.852 & 73.117 & 1.534 & -0.279 & 26.216 & -26.831 \\ -2.103 & -85.136 & -1.746 & 0.304 & -26.831 & 31.236 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Una vez calculada la matriz aumentada inversa Sk^{-1}, se estiman los nuevos parámetros mediante la ecuación (5.3). Por ejemplo, utilizando la matriz estimada (6.5), el primer parámetro será $\alpha_0 = -1 * (5.708/0.228) = -25.065$. Los parámetros estimados mediante el método propuesto se muestran en la tabla 6.2.

- **Realizar pruebas de hipótesis**

Para probar la significancia de los parámetros estimados (en este caso, los estimados mediante el método propuesto) se utiliza la Prueba de Wald, la cual utiliza el error estándar estimado mediante (5.4). Por ejemplo, utilizando la matriz calculada (6.3), para el caso del parámetro $\hat{\alpha}_0 = -25.0646$, el error estándar es $\sqrt{89.079} = 9.438$. El estadístico z estimado mediante la ecuación (4.45) será $z = -25.064/9.438$. Utilizando la función inversa de la distribución Normal Estándar, obtenemos el valor de probabilidad para la prueba de hipótesis $valor - p = 0.0079$, considerando un valor $\alpha = 0.05$.

La tabla 6.2 muestra los resultados correspondientes a los parámetros estimados; tales resultados indican que todos los parámetros son significativos y deben ser incluidos en el modelo. Esto sugiere que las condiciones del contenido de azufre, la temperatura y el tipo de fluido afectan la vida del intercambiador de calor.

- **Estimar la probabilidad de falla P_i**

Los modelos ajustados para calcular la probabilidad de falla, la tasa de falla, la tasa de falla acumulada, la vida media y la mediana para los intercambiadores de calor en servicio, dados lo covariables se muestran a continuación.

1. Tasa de falla

$$\lambda(t|X_1, X_2, X_3) = \\ 9.2358t^{8.2353} \exp\left(-25.064 - X_1 0.5193 + X_2 0.921 - X_3 8.1295\right) \quad (6.6)$$

2. Tasa de falla acumulada

$$\Lambda(t|X_1, X_2, X_3) = \\ \exp\left(9.2358 \log(t) + (-25.064 - X_1 0.5193 + X_2 0.921 - X_3 8.1295)\right) \quad (6.7)$$

3. Confiabilidad

$$R(t|X_1, X_2, X_3) = \exp\left(-\exp\left(9.2358\log(t) + (-25.064 - X_1 0.5193 + X_2 0.921 - X_3 8.1295)\right)\right) \quad (6.8)$$

4. Vida Media (MTTF)

$$MTTF(X_1, X_2, X_3) = \left(\exp\left(-25.064 - X_1 0.5193 + X_2 0.921 - X_3 8.1295\right)^{-\frac{1}{9.2358}}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{9.2358}\right) \quad (6.9)$$

5. Función cuantíl del modelo

$$Q(R|X_1, X_2, X_3) = \left[\frac{-\log(R)}{\exp(-25.064 - X_1 0.5193 + X_2 0.921 - X_3 8.1295)}\right]\frac{1}{9.2358} \quad (6.10)$$

Con el modelo de confiabilidad (ecuación 6.8), se estima la probabilidad de falla necesaria para la estimación del riesgo utilizado en RBI. Aplicando las consecuencias (ver el API 581, 2008) para cada intercambiador, se calcula el riesgo estimado. Los resultados se muestran en la tabla 6.3.

Tabla 6.3: Estimación del riesgo y tiempo de reemplazo

Dispositivo	X1	X2	X3	T	F/C	Prob. Falla	Consecuencia	Riesgo	Prob. Max.	T_R
191-X-25A-T1	8%	400	Pesado	25	Si	0.6630	$150,000.00	$5,616.00	0.5000	23.81
191-X-25A-T2	2%	300	Ligero	20	Si	0.6536	$120,389.44	$31,847.82	0.6230	18.33
191-X-25A-T3	4%	310	Ligero	19	No	0.4440	$146,132.80	$129,380.14	0.5132	19.27
E101-A-T1	6%	480	Pesado	7	Si	0.0374	$132,699.20	$104,971.70	0.5652	9.39
E322-A-T1	10%	500	Pesado	9	Si	0.2645	$158,982.40	$106,701.04	0.4718	9.92
E322-A-T2	5%	328	Ligero	18	No	0.6712	$224,690.40	$99,755.80	0.3338	17.98
HE-115-T1	9%	505	Pesado	10	Si	0.8854	$150,973.60	$98,682.38	0.4968	8.85
HE-115-T2	4%	455	Pesado	12	Si	0.7911	$146,480.20	$105,552.17	0.5120	10.95
PR6419-T1	6%	315	Ligero	22	No	0.7206	$341,340.88	$226,322.66	0.2197	22.42

Cabe mencionar que la probabilidad máxima de la tabla 6.3 se estimó considerando una meta corporativa para el riesgo de \$75,000 expresada en términos financieros; con la probabilidad máxima estimada y la ecuación (6.10) se realizó la estimación del Tiempo de Reemplazo (T_R) en años, para cada intercambiador.

Una vez que los resultados han sido obtenidos, se pueden tomar decisiones acerca del reemplazo de los intercambiadores en servicio y realizar planes de mantenimiento. Por ejemplo, considere el intercambiador PR6419-T1 con $MTTF = 20.316$; su riesgo es alto dado que su consecuencia financiera es alta, y por lo tanto su probabilidad de falla máxima también lo es. Entonces se podría pensar en reemplazar (o dar mantenimiento) a los intercambiadores que trabajen con un 6 % de azufre, a 315 $^\circ$F y con un crudo ligero, en un tiempo menor (o igual) a los 22 años de servicio.

- **Validación del modelo ajustado**

Para validar el modelo ajustado a los datos de la Tabla 6.2 correspondientes a tiempos de vida de intercambiadores de calor, se utilizó el método de validación cruzada con reducción de un dato, el cual se muestra en el capítulo IV, sección 4.8.1.

Dado que el modelo ajustado es utilizado para predicción, es conveniente considerar R^2_{PRESS} estimada mediante (4.109), la cual está basada en el estadístico $PRESS$ dado por (4.108), como medida de la capacidad de predicción del modelo ajustado para predecir nuevas observaciones. Para el modelo ajustado, los estadísticos estimados son $PRESS = 8.2022$ y $R^2_{PRESS} = 0.9749$, lo cual respalda que el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de los intercambiadores de calor.

Por ejemplo, para el intercambiador 191-X-25A-T2, el tiempo de falla observado fue de 20 años y el modelo ajustado pronosticó 19.93 años; para el intercambiador E322-A-T2 el tiempo observado fue 18 y el modelo pronosticó 17.94. Por otro lado, el valor pronóstico más alejado fue para el intercambiador 191-X-25A-T1, el cual presentó un tiempo observado de 25 años y el modelo pronosticó 23.40 años. Lo anterior muestra que

los estadísticos estimados, determinan adecuadamente la exactitud que presenta el modelo para realizar predicciones acerca del tiempo de vida del intercambiador.

En base a lo anterior, el riesgo y el tiempo de reemplazo mostrados en la tabla 6.3 son confiables y pueden ser usados para realizar planes de mantenimiento basados en la metodología RBI.

6.1.2. Caso 2: Dado en Máquina de Inserción

Molina (2005) realizó un trabajo en el cual deseaba conocer los parámetros de operación para los cuales el dado de una máquina de inserción de terminales puede incrementar su tiempo de vida. Las variables operacionales involucradas en el proceso fueron X_1 : Profundidad del Pusher, X_2 : Velocidad de Inserción y X_3 : Distancia entre alimentador y cortador, la respuesta es T : Tiempo de falla del dado. Los niveles de las variables significantes en el proceso de inserción se muestran en la tabla 6.4.

Tabla 6.4: Proceso de inserción: variables y niveles

Variables	Nivel		
	Bajo	Central	Alto
Profundidad del Pusher	-0.015	0	0.015
Velocidad de Inserción	28.10	30.91	34.00
Distancia entre Alimentador y Cortador	-0.015	0.0407	0.015

El autor realizó un diseño experimental 2^3 aumentado con cuatro puntos centrales, el diseño y los tiempos de falla correspondientes a cada corrida se muestran en la tabla 6.5.

Para determinar que modelo utilizar, es necesario realizar la prueba Anderson-Darling para datos completos (ver Capítulo IV, sección 4.1.2). El estadístico estimado correspondiente a la distribución Weibull fue $A_n^2 = 0.4851$, con un valor de probabilidad $valor - p = 0.2358$, por lo tanto es factible utilizar el modelo Weibull.

Los resultados del ajuste se muestran en la tabla 6.6, incluyendo la comparación entre el método propuesto y el método convencional de riesgo proporcional. Dado que el número de condición $k_c = 10,512$ fue alto, se ajustó el modelo propuesto con un valor de $k = 0.007358$

Tabla 6.5: Diseño 2^3 para el Dado

Factores				Respuesta	
Dado	Profundidad	Velocidad	Distancia	Tiempo de Vida	Falla Reportada
1	-1	-1	-1	135.84	Si
2	1	1	-1	12	Si
3	1	-1	1	103.92	Si
4	-1	1	1	58	Si
5	0	0	0	79.92	Si
6	0	0	0	80.16	Si
7	1	-1	-1	88.08	Si
8	-1	1	-1	64.08	Si
9	-1	-1	1	135.84	Si
10	1	1	1	24	Si
11	0	0	0	72	Si
12	0	0	0	87	Si

para estimar los nuevos parámetros. Es importante hacer notar que para este caso, se utilizó la misma secuencia de pasos detallados en el capitulo V y aplicados en el caso anterior (caso 1) referente a los intercambiadores de calor. El primer coeficiente $\hat{\alpha}_0$ de

Tabla 6.6: Resultados del ajuste y comparación

CONVENCIONAL				PROPUESTO			
Coeficientes		Valor-P	Error Est.	Coeficientes		Valor-P	Error Est.
$\hat{\alpha}_0$	-25.0962	0.0001	6.3603	$\hat{\alpha}_{R0}$	-19.0047	0.0006	5.5369
$\hat{\beta}_1$	2.0800	0.0163	0.8662	$\hat{\beta}_{R1}$	1.6160	0.0518	0.8311
$\hat{\beta}_2$	3.3731	0.0015	1.0622	$\hat{\beta}_{R2}$	2.5928	0.0083	0.9825
$\hat{\beta}_3$	-0.1481	0.7467	0.4585	$\hat{\beta}_{R3}$	-0.1415	0.7574	0.4580
$\hat{\beta}_W$	5.8244	0.0009	1.4552	$\hat{\beta}_{RW}$	4.4319	0.0068	1.2672

la tabla 6.6 representa el parámetro de escala $\hat{\eta}$ y el último coeficiente $\hat{\beta}_W$ representa el parámetro de forma $\hat{\beta}$ del modelo Weibull; por consiguiente los coeficientes $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ y $\hat{\beta}_3$ son los parámetros que representan los factores operacionales profundidad, velocidad y distancia respectivamente.

Es evidente que la colinealidad está afectando el modelo, dado que su número de

condición es grande. Debido a esto, la diferencia en los parámetros estimados mediante los métodos mostrados es significativa, esto lo podemos comprobar con el valor de probabilidad para la prueba de hipótesis.

El método convencional sugiere que los parámetros 1, 2, 3 y 5 son significativos en el modelo, siendo que para el modelo propuesto solamente los factores 1, 3 y 5 son significativos. Este resultado indica que el único factor operacional que está afectando la confiabilidad del dado, es la velocidad de inserción y en cierta forma, aunque no es estadísticamente significativa la profundidad del pusher.

El modelo de confiabilidad para el dado, considerando los factores operacionales X_1 : Profundidad del Pusher, X_2 : Velocidad de Inserción y X_3 : Distancia entre alimentador y cortador, esta representado por (6.11).

$$R(t|X_1, X_2, X_3) = \exp\left(-\exp\left(5.824\log(t) + (-25.096 + X_1 2.08 + X_2 3.37 - X_3 0.14)\right)\right) \quad (6.11)$$

Los resultados de la estimación de la probabilidad de falla y el tiempo medio a la falla dados los covariables X_1, X_2 y X_3 se muestran en la tabla 6.7. Una vez obtenidos los resultados, se pueden tomar decisiones acerca del reemplazo de los dados en servicio y establecer frecuencias de reemplazo basadas en su probabilidad de falla.

Por otro lado, si se deseara aplicar la metodología RBI al igual que el caso 1, se podrían determinar las consecuencias de la falla en términos financieros, estimar el riesgo para los dados y estimar una probabilidad de falla máxima correspondiente a una meta de riesgo corporativa.

- **Validación del modelo ajustado**

Para validar el modelo ajustado (ecuación 6.11), también se utilizó el método de validación cruzada con reducción de un dato (capítulo IV, sección 4.8.1). En la validación se consideró el estadístico $PRESS$ calculado mediante (4.108) y R^2_{PRESS} dada por (4.109), como medida de la capacidad del modelo.

Tabla 6.7: Estimación de la probabilidad de falla

Dado	Falla Reportada	X1	X2	X3	Tiempo de Falla	Prob. Falla
1	Si	-1	-1	-1	135.84	0.236
2	Si	1	1	-1	12.00	0.974
3	Si	1	-1	1	103.92	0.793
4	Si	-1	1	1	58.00	0.568
5	Si	0	0	0	79.92	0.778
6	Si	0	0	0	80.16	0.783
7	Si	1	-1	-1	88.08	0.634
8	Si	-1	1	-1	64.08	0.823
9	Si	-1	-1	1	135.84	0.183
10	Si	1	1	1	24.00	0.348
11	Si	0	0	0	72.00	0.613
12	Si	0	0	0	87.00	0.889

Los estadísticos estimados para el modelo son $PRESS = 2,230$ y $SST = 15,454$, lo que estima $R^2_{PRESS} = 0.8613$, y respalda que el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de los dados. Por ejemplo para el dado 11, el tiempo de falla observado fue de 72 horas y el modelo ajustado pronosticó 71.84 horas; para el dado 5 el tiempo observado fue 79.92 y el modelo pronosticó 79.28. Sin embargo, hubo pronósticos con mayor error; por ejemplo, el dado 1 presentó un tiempo observado de 135.84 horas y el modelo pronosticó 159.47 horas. Este margen de error se ve reflejado directamente en los estadísticos estimados, es por eso que el estadístico de predicción fue $R^2_{PRESS} = 0.8613$.

Es posible observar que debido al ajuste, la capacidad de predicción es apenas aceptable y por consecuencia la R^2_{PRESS} es casi 85 %, sin embargo, para este caso se sugiere la utilización del modelo semi-paramétrico. Para el modelo semi-paramétrico se obtuvo un $PRESS = 0.008$ que con respecto a $SST = 1.0613$, calcula un indicador de predicción de $R^2_{PRESS} = 0.9816$, por lo tanto en este caso es mejor opción el modelo semi-paramétrico. En el caso 3, se muestra una aplicación completa de éste modelo para la herramienta de corte.

6.1.3. Caso 3: Herramienta de Corte

Utilizando los datos del diseño publicado por Taraman (1974) y después analizado por Merrick, Soyer y Mazzuchi (2003), donde: T representa la vida de la herramienta de corte en minutos, con variables operacionales X_1 : Velocidad (fpm), X_2 : Tasa de Alimentación (ipr) y X_3 : Profundidad de Corte (inches) respectivamente, se realizó la aplicación del método propuesto. Es importante mencionar que se utilizaron solo tiempos de falla completos.

Tabla 6.8: Tiempos de vida de la herramienta de corte

	Factores			Respuesta	
Herramienta	Velocidad	Alimentación	Profundidad	Tiempo de Vida	Falla Reportada
1	340	0.0063	0.0210	70	Si
2	570	0.0063	0.0210	29	Si
3	340	0.0142	0.0210	60	Si
4	570	0.0142	0.0210	28	Si
5	340	0.0063	0.0400	64	Si
6	570	0.0063	0.0400	32	Si
7	340	0.0142	0.0400	44	Si
8	570	0.0142	0.0400	24	Si
9	440	0.0091	0.0290	35	Si
10	440	0.0091	0.0290	31	Si
11	440	0.0091	0.0290	38	Si
12	440	0.0091	0.0290	35	Si
13	305	0.0091	0.0290	52	Si
14	635	0.0091	0.0290	23	Si
15	440	0.0047	0.0290	40	Si
16	440	0.0173	0.0290	28	Si
17	440	0.0091	0.0135	46	Si
18	440	0.0091	0.0455	33	Si
19	305	0.0091	0.0290	46	Si
20	635	0.0091	0.0290	27	Si
21	440	0.0047	0.0290	37	Si
22	440	0.0173	0.0290	34	Si
23	440	0.0091	0.0135	41	Si
24	440	0.0091	0.0455	28	Si

Empleando los datos mostrados en la tabla 6.8, se ajustó un modelo semi-paramétrico, con el fin de mostrar su utilidad y eficiencia para realizar predicciones, al igual que el modelo paramétrico. Los resultados del ajuste se muestran en la tabla 6.9, incluyendo la comparación entre el método propuesto y el método convencional; dado que el número de

condición es alto $k_c = 2.79e + 8$, se ajustó el modelo propuesto con valor de $k = 0.0288$ para estimar los nuevos parámetros.

Se puede observar (tabla 6.9) una gran diferencia entre los coeficientes estimados mediante el método actual y el método propuesto, lo cual indica que la colinealidad afectaba severamente en la estimación, el efecto de la colinealidad también se observa en el error estándar del coeficiente, el cual con la estimación del método propuesto se reduce significativamente. Además, el valor de probabilidad para la prueba de hipótesis (Prueba de Wald) de los parámetros estimados mediante el método convencional, sugiere que ningún parámetro es cero, sin embargo el método propuesto indica que solo el coeficiente $\hat{\beta}_1$ no lo es, es decir que solo X_1 : la velocidad de corte, afecta la vida de la herramienta.

Tabla 6.9: Resultados del ajuste y comparación

CONVENCIONAL				PROPUESTO			
Coeficientes		Valor-P	Error Est.	Coeficientes		Valor-P	Error Est.
$\hat{\beta}_1$	0.0284	0.0001	0.006	$\hat{\beta}_{R1}$	0.0157	0.0096	0.0061
$\hat{\beta}_2$	244.217	0.0017	77.9068	$\hat{\beta}_{R2}$	1.1555	0.8442	5.8791
$\hat{\beta}_3$	70.2331	0.0117	27.8617	$\hat{\beta}_{R3}$	1.9848	0.7308	5.769

La interpretación de los parámetros se obtiene a partir del valor $e^{\hat{\beta}_j}$ para cada uno de los $\hat{\beta}_j$, esto quiere decir que por cada unidad de incremento en la variable correspondiente, la tasa de riesgo se aumenta o disminuye según sea el caso. Además, $100(e^{\hat{\beta}_j} - 1)$ proporciona el cambio en porcentaje que se produce con cada unidad de cambio en la variable independiente, reflejado en la tasa de riesgo, la tabla 6.10 muestra los valores estimados para cada caso.

Es evidente que al obtener parámetros más estables mediante la utilización del método propuesto, se obtiene una interpretación diferente acerca del efecto de los parámetros sobre la probabilidad de falla, es decir, de los factores operacionales sobre la vida de la herramienta de corte.

Dado que en éste modelo, para estimar la confiabilidad y tasa de falla del compo-

Tabla 6.10: Comparación de efectos

CONVENCIONAL				PROPUESTO			
Coeficientes		$e^{\hat{\beta}_i}$	$100(e^{\hat{\beta}_i}-1)$	Coeficientes		$e^{\hat{\beta}_i}$	$100(e^{\hat{\beta}_i}-1)$
$\hat{\beta}_1$	0.0284	1.02880712	2.8807125	$\hat{\beta}_{R1}$	0.0157	1.01582389	1.58238925
$\hat{\beta}_2$	244.217	1.155E+106	1.155E+108	$\hat{\beta}_{R2}$	1.1555	3.17561083	217.561083
$\hat{\beta}_3$	70.2331	3.1758E+30	3.1758E+32	$\hat{\beta}_{R3}$	1.9848	7.27759172	627.759172

nente se utilizan como insumo los parámetros estimados (ver capítulo IV, sección 4.3), la diferencia mostrada en la tabla 6.10 tiene efecto directo sobre la probabilidad de falla estimada, por lo tanto, si se utiliza el modelo convencional para estimar tal probabilidad, se realizarán planes de mantenimiento y frecuencias de reemplazo inadecuadas, incurriendo en costos por mantenimiento, paros no programados y en caso extremo se puede poner en riesgo la integridad de los operadores.

- **Validación del modelo ajustado**

Al igual que los casos anteriores, se utilizó el método de validación cruzada con reducción de un dato (capítulo IV, sección 4.8.1) para validar el modelo ajustado, considerando como indicadores el estadístico $PRESS$ y R^2_{PRESS}, como medida de la capacidad de predicción del modelo.

Los estadísticos estimados para el modelo son $PRESS = 0.0014$ y $SST = 1.865$, lo que estima un $R^2_{PRESS} = 0.991$, y respalda que el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de la herramienta de corte.

Por ejemplo, las herramientas 4, 16 y 24, con tiempo de falla de 28 minutos, presentan una confiabilidad de 1, 0.84 y 0.85, considerando sus niveles de covariables X_1, X_2 y X_3 respectivamente. Para estas herramientas el modelo estimó una confiabilidad de 0.99, 0.83 y 0.85, respectivamente. Sin embargo, para la herramienta 23 que tiene una confiabilidad de 0.4933, el modelo pronosticó 0.4608, representando una diferencia de 0.03247, lo cual se ve reflejado en los estadísticos estimados.

Note que los tiempos de falla de la herramienta de corte, pueden ser representados mediante el modelo Log-Normal, dado que el valor de probabilidad lo sugiere, $valor - p = 0.506$, para un estadístico $A_n^2 = 0.324$, sin embargo como ya se mostró el modelo semi-paramétrico es capaz de realizar predicciones con gran certeza e incluso es posible como en el caso 2, que tenga un estadístico repredicción mejor que el modelo paramétrico, dado esto, para este caso se decide utilizar el modelo semi-paramétrico.

Con los resultados presentados a través del capítulo, se muestra que el modelo propuesto para la estimación de la probabilidad de falla incorporando los efectos del medio ambiente operacional, realiza predicciones adecuadas en relación a la vida útil del componente en cuestión. Por lo tanto, el modelo propuesto representa una opción factible para realizar estimaciones confiables de la probabilidad de falla utilizada para la determinación de frecuencias de reemplazo y planes de mantenimiento, además de su utilización en la aplicación de la metodología RBI.

Capítulo 7

Conclusiones

El riesgo en la metodología RBI, es una función de la probabilidad de falla, P, del sistema en estudio y de las *consecuencias,* C, de su falla (ecuación 1.1). Las consecuencias dependen del escenario de operación y se establecen combinando métodos de ingeniería de planta con la experiencia de los expertos. La estimación de la probabilidad de falla, P, es parte medular en el cálculo del riesgo, por lo tanto, estimar esta probabilidad de forma adecuada conducirá a la elaboración confiable de planes de mantenimiento para los sistemas o componentes.

En la estimación del riesgo es necesario incorporar los efectos que el medio ambiente operacional (condiciones de operación) tiene sobre la confiabilidad del sistema o componente. De no ser así, se tendrá una modelación poco razonable del comportamiento de los equipos o componentes y en consecuencia, los planes de mantenimiento serán poco confiables; motivo por el cual se desarrolló la presente investigación.

Con este fin, se utilizaron los modelos de riesgo proporcional paramétricos y semiparamétricos para estimar la probabilidad de falla incorporando los efectos de factores operacionales mediante covariables. Sin embargo, como se planteó en el capítulo II, estos modelos se ven afectados por la colinealidad inherente a la matriz Hessiano, y se mostró que las conclusiones a las que llegamos utilizando los coeficientes estimados, sus pruebas de hipótesis y la probabilidad de falla estimada pueden ser incorrectas. Lo cual nos centra

principalmente en la obtención de parámetros estimados más estables para proporcionar soporte estadístico a la estimación de la probabilidad de falla y, por consecuencia, al riesgo calculado para la aplicación de la metodología RBI.

Para esto, se propuso un método alternativo a los modelos de riesgo proporcional (ver capítulo V), basado en los fundamentos del modelo de Regresión Ridge. El método consiste en estabilizar la matriz Hessiana mediante la adición de un valor k, con lo cual se consigue disminuir el efecto de la colinealidad sobre los parámetros $\hat{\beta}_j$ estimados (referente a los objetivos número 2, 3 y 4); utilizando como indicador de colinealidad el número de condición k_c.

La aplicación de la metodología propuesta a los datos de los intercambiadores de calor (capítulo VI, sección 6.1.1), en el caso paramétrico Weibull, muestra que la matriz Hessiano presenta un número de condición alto, por lo tanto es necesario aplicar el método propuesto. Se ajustaron los modelos para estimar: confiabilidad de un componente, probabilidad de falla, tasa de falla y vida media considerando factores operacionales, con lo cual se cumple el objetivo general y el primer objetivo específico.

La tabla 6.3 (capítulo VI), muestra los resultados de la estimación de la probabilidad de falla y el riesgo utilizado los modelos estimados mediante el método propuesto. La validación de los modelos ajustados sugiere que debido a que los estadísticos estimados son $PRESS = 8.2022$ y $R^2_{PRESS} = 0.9749$, el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de los intercambiadores de calor. Por lo tanto, se cumple con el objetivo de generar una metodología estadísticamente confiable para incorporar los efectos de factores operacionales sobre la estimación de la probabilidad de falla y su utilización para la gestión de mantenimiento basado en la metodología RBI.

Por otro lado, en el caso de la maquina de inserción, (capítulo VI, sección, 6.1.2) se realizó una comparación entre el método convencional de riesgo proporcional paramétrico Weibull y el método propuesto, para mostrar la disminución del efecto de la colinealidad sobre los parámetros estimados $\hat{\beta}_j$, sus pruebas de hipótesis y la probabilidad de falla

estimada.

Para esta aplicación, el número de condición fue $k_c = 10,512$. Los resultados mostrados en la tabla 6.6 sugieren que mediante el método convencional los parámetros 1, 2, 3 y 5 son significativos en el modelo siendo que para el modelo propuesto los factores significativos son solamente el 1, 3 y 5. Esto significa que el único factor operacional que está afectando significativamente la confiabilidad del dado es la velocidad de inserción y en cierta forma aunque no es estadísticamente significativa, la profundidad del pusher.

Con estos resultados, se muestra que mediante la utilización de los fundamentos del modelo de Regresión Ridge y diagnósticos de colinealidad adaptados al modelo de riesgo proporcional, se permite obtener parámetros más estables (referente a la hipótesis general e hipótesis especifica número 1), mostrando un efecto significativo sobre el estadístico de Wald; es decir el estadístico refleja el efecto que el gradiente tiene sobre los coeficientes estimados (hipótesis 3 y 4). Los estadísticos estimados para la validación del modelo son $PRESS = 2.230$ y $SST = 15.454$ lo que estima un $R^2_{PRESS} = 0.8613$. Esto respalda que el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de los componentes y es factible utilizarlo para estimar probabilidad de falla, tasa de falla y vida mediadle componente.

Es conveniente mencionar que en muchas situaciones el modelo de Cox semi-paramétrico tiene ventajas sobre los modelos paramétricos debido a la estructura del riesgo base. Se puede decir que el modelo de Cox es igualmente eficiente que los modelos paramétricos, incluso aún cuando las asunciones del modelo paramétrico se cumplen, el análisis mediante el modelo de Cox es más eficiente (Harrell, 2001).

Lo anterior se ve reflejado en la capacidad de predicción del modelo, el cual es apenas aceptable considerando que R^2_{PRESS} es casi 85 %. Para este caso se sugiere la utilización del modelo semi-paramétrico. Este modelo obtiene un $PRESS = 0.008$ que con respecto a $SST = 1.0613$, calcula un indicador de predicción de $R^2_{PRESS} = 0.9816$, por lo tanto, para este caso es mejor opción el modelo semi-paramétrico. Debido a la capacidad del

modelo, el caso 3 (capitulo Vl, sección 6.1.3) muestra una aplicación completa para una herramienta de corte en un proceso de maquinado.

La tabla 6.9 muestra los resultados del ajuste del modelo semi-paramétrico, incluyendo la comparación entre el método propuesto y el método convencional; dado que el número de condición fue alto $k_c = 2.79e + 8$, se ajustó el modelo propuesto con valor de $k = 0.0288$ para estimar los nuevos parámetros. Podemos observar una gran diferencia entre los coeficientes estimados mediante el método actual utilizando únicamente Newton-Raphson y el método propuesto que estima unos nuevos parámetros. El efecto de la colinealidad también se observa en el error estándar del coeficiente, el cual, con la estimación del método propuesto se reduce significativamente. Además, el valor de probabilidad $valor-p$ para la prueba de hipótesis (Wald Test) de los parámetros estimados mediante el método convencional, sugiere que ningún parámetro es cero, sin embargo el método propuesto muestra que solo el coeficiente 1 no lo es, es decir, que solo X_1 : la velocidad de corte afecta la vida de la herramienta; con los resultados de éste caso, se comprueban las hipótesis específicas 1-4.

Además, en la validación, los estadísticos estimados para el modelo son $PRESS = 0.0014$ y un $SST = 1.865$, lo que estima un $R^2_{PRESS} = 0.991$. Esto sostiene que el modelo ajustado es capaz de realizar predicciones acerca de la vida de la herramienta de corte.

Con lo anterior, se demuestra que la aportación es importante, ya que se logró cumplir con el objetivo de generar una metodología estadísticamente confiable para incorporar los efectos que el medio ambiente operacional tiene sobre la estimación de la probabilidad de falla y a su vez del riesgo utilizado para la gestión de mantenimiento basado en la metodología RBI. Por lo tanto, dado que la probabilidad de falla es estimada de forma correcta y confiable, se aporta una herramienta para asegurar que los análisis que realice la gerencia, tengan un soporte estadístico razonable.

En cuanto al trabajo futuro, se pretende extender la metodología propuesta en modelos como la regresión logística, los cuales también son afectados por la colinealidad debido al

método de estimación de parámetros. Además, también se considera como trabajo futuro, utilizar algún otro método de optimización numérica como el Newton-Cauchy o el Quasi-Newton que realizan modificaciones al Hessiano para estabilizar la estimación (Nazareth et. al. 2003).

Otra aplicación e investigación futura sería aplicar modelos de distribución más generales como lo es la gama generalizada para la función de riesgo base en los modelos de riesgo proporcional. Es posible que para modelos como la gamma generalizada la estimación de los parámetros sea de alguna manera subóptima, debido a la forma que éste tipo de funciones presenta. Adicionalmente, se podrían adecuar a los modelos de riesgo proporcional, algunas otras técnicas existentes para el tratamiento de la colinealidad.

Bibliografía

[1] Abernethy R. (2008). *The New Weibull Handbook.* Published and Distributed by Robert B. Abernethy. Fifth Edition.

[2] Allen D. M. (1971). Mean square error of prediction as a criterion for selecting variables, Technometrics, 13, 1971, pp. 469-475.

[3] _____.(1977). The relationship between variable selection and data augmentation and a method for prediction, Technometrics, 16, 1977, pp. 125-127.

[4] Ashlock D., (2005). *Evolutionary Computation for Modeling and Optimization.* Springer Science and Business Media, LLC. Second Edition, ISBN-10: 0-387-22196-4

[5] Balakrishnan, P., y DeVries, M. F. (1985). Sequential Estimation of Machinability Parameters for Adaptive Optimatization of Machinability Data Base Systems. Journal of Engineering for Industry, 27, pp. 159-166.

[6] Bonate P. L. (1999). The effect of collinearity on parameter estimates in nonlinear mixed effects models. Pharmaceutical Research. Vol.16, No. 5, pp.709-717.

[7] Bonnans J. F., Gilbert J., Lemaréchal C., Sagastizábal C. (2006). *Numerical Optimization, Theoretical and Practical Aspects.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York r, Second Edition, ISBN: 3-540-35445-X

[8] Breslow, N. E. (1974). Covariance analysis of censored survival data. Biometrics 30, pp. 89-99.

[9] _____. (1972). Discussion of the paper by D. R. Cox. JR Statistics Soc B, 34: pp. 216-217.

[10] Corpas E. y Lara A. M., (2009). Aplicación del modelo de riesgos proporcionales de Cox a pacientes con sida en España. Revista Investigación Operacional, Vol., 30, No 3, 214-222.

[11] Cox D. R. (1972). Regression models and life tables. Journal of the Royal Statistical Society, Serie B (Methodological), Vol 34, No. 2, pp 187-220.

[12] _____, y Snell, E. J. (1989). *The Analysis of Binary Data*, 2nd ed. London: Chapman and Hall.

[13] D'Agostino R. B. and Stephens M. (1986). *Goodness of fit Techniques.* CRC Press, ISBN: 0824774876, pp. 576.

[14] Delong G., Guirguis H., So Y. (1994). Efficient Computation of Subset Selection Probabilities with Application to Cox Regression. Biometrika, Vol. 81, No. 3, pp. 607-611.

[15] Dodson B. (1994). *Weibull Analysis.* ASQ Quality Press. Milwaukee, Wiscounsin.

[16] _____, Nolan D. (1999). *Reliability Engineering Handbook.* Marcel Dekker Inc, Quality Publishing. New York, Tucson Arizona

[17] Efron, B. (1977). The efficiency of Cox's likelihood function for censored data. Journal of the American Statistical Association 72, pp. 557-565

[18] _____. (1983). Estimating the error rate of a prediction rule: improvement on cross-validation. Journal of the American Statistical Association. 78 (382), pp. 316-330.

[19] Frisco E. W. (1998). *Anderson-Darling and Cramér-Von Mises based goodness-of-fit test for the Weibull distribution with known shape using normalizad spacings*, Thesis

for the Degree of Master of Science in Operations Research. Faculty of the School of Engineering of the Air Force Institute of Technology Air University , USAF.

[20] Geisser S. (1993). *Predictive Inference: An Introduction*, Monographs on statistics and applied probability, Chapman & Hall, First Edition.

[21] Gertsbakh (2000). *Reliability Theory with applications to preventive maintenance.* Springer- Verlag Berlin Heidelberg.

[22] Godines F., y Ramírez G. (2003). Censoring and collinearity in the log-linear exponential regression model. Agrociencia 37: 267-275.

[23] Goeman J. J. (2009). L1 Penalized Estimation in the Cox Proportional Hazards Model. Biometrical Journal, 52 (1), 70-8

[24] González-González D., Piña-Monarrez M., Cheang-Martinez A. (2008). Improvement of concrete structural elements MTTF by applying a polymeric coating with viny- lester seal. International Journal of Industrial Engineering. ISSN 1072-4761 P. 428-435.

[25] _____, y Piña-Monarrez M. (2008). An accelerated failure time model for estimating reliability in a degradation process. Proceedings of the Second International Conference on Industrial, Mechatronics and Manufacturing. October 23-25, Cd. Juárez, México. pp. 161-169.

[26] _____, Piña-Monarrez M., Torres-Treviño L. (2008). Estimation of Parameters in Cox's Proportional Hazard Model: Comparisons between Evolutionary Algorithms and the Newton-Raphson Approach. MICAI 2008, LNAI 5317, pp. 513–523. Springer-Verlag Berlin.

[27] _____. (2009). Hybrid approach for optimizing the Cox's partial likelihood function in presence of a stationary system. International Journal of Industrial Engineering. ISSN 1072-4761 P. 418-426.

[28] _____, Piña-Monarrez M., Cantú-Sifuentes Mario, Praga-Alejo R. (2010). Collinearity reduction in the Cox's Proportional Hazard Model by applying PCA. International Journal of Industrial Engineering. ISSN 1072-4761 P. 300-308.

[29] Gratton S., Malmedy V., Toint P. L. (2009). Multi-Secant Equations, Approximate Invariant Subspaces and Multigrid Optimization. Mathematical Programming Society Optimization on line, MPS.

[30] Gratton S. y Toint L. (2009). Approximate invariant subspaces and quasi-Newton optimization methods. Optimization Methods and Software, 2009.

[31] Harrell F. (2001). *Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic regression and survival analysis.* Springer Series in Statistics. ISBN 0387952322, pp 389-522.

[32] Hoerl, A. E. y Kennard R. W., (1970), Ridge Regression: Biased estimation for non-orthogonal problems. Technometrics, Vol. 12, No. 1.

[33] Hosmer D. y Lemeshow S. (1989). *Applied logistic regression*, New York: Wiley.

[34] Inan D. y Tez M. (2008). Liu Type Estimator in Cox Proportional Hazard Regression Model in Presence of Collinearity. International Conference 20th EURO Mini Conference "Continuous Optimization and Knowledge-Based Technologies", May 20–23, Neringa, Lithuania. ISBN: 978-9955-28-283-9

[35] Kalbfleisch, J. D. y Prentice, R. L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data.* New York: Wiley.

[36] Kaplan E. L. y Meier P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. J. Amer. Statist. Assoc., 53, 457-481

[37] Kim J., Kim Y., Kim Y. (2008). A gradient-based optimization algorithm for LASSO. *J. Comput. Graph. Stat.*, 17, 994-1009.

[38] Kohavi R. (1995). A study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection. Appears in the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI).

[39] Kreike B., Hart G., Bartelink H. (2010). Analysis of breast cancer related gene expression using natural splines and the Cox proportional hazard model to identify prognostic associations. Breast Cancer Res Treat (2010) 122:711–720.

[40] Lawless, J. F. y Wang P. (1976). A simulation study of ridge and other regression estimators, Communication in Statistics - Theory and Method, A(5), 4.

[41] Lesaffre, E. y Marx B. D. (1993). Collinearity in generalized linear regression. Communications in Statistics-Theory and Methods. 22(7): pp. 1933-1952.

[42] Lee, K. Y. y Weissfeld L. A. (1996). A multicollinearity diagnostic for the Cox Model with time dependent covariates. Communications in Statistics and Simulation. 25(1): pp. 41-60.

[43] Li H. y Gui J. (2004). Partial Cox Regression Analysis for High Dimensional Microarray Gene Expression Data. Center for Bioinformatics & Molecular Biostatistics.

[44] Liu W. et al. (2009). Analysis of Prognostic Factors of Esophageal and Gastric Cardiac Carcinoma Patients after Radical Surgery Using Cox Proportional Hazard Model, A Random Sampling Study from the Fourth Hospital of Hebei Medical University during the Period of 1996-2004. Clin Oncol Cancer Res 6: 290-295

[45] Lustbader E. D. (1986). *Relative risk regression diagnosis.* In: Moolgavkar SH, Prentice RL (Eds), Modern statistical methods in chronic disease epidemiology. SIAM, Philadelphia.

[46] Mackinnon M. J. y Puterman M. L. (1989). Collinearity in generalized linear models. Comunications in Statistics-Theory and Methods. 18(9): 3463-3472.

[47] Maddala G. (1983). *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, New York: Cambridge University Press, 401 p.

[48] Magee, L. (1990). R measures based on Wald and likelihood ratio joint significance tests, Am. Statistician 44, 250-3.

[49] Mela C. y Kopalle P. (2002). The impact of collinearity on regression analysis: the asymmetric effect of negative and positive correlations. Applied Economics, 34, 667.

[50] Merrick J., Soyer R., Mazzuchi T. (2003). A bayesian semi parametric analysis on the reliability and maintenance of machine tools. Technometrics, February 2003, Vol. 45, No. 1.

[51] Molinero L. (2001). Modelos de regresión Cox para el tiempo de supervivencia. Asociación de la sociedad Española de Hipertensión. España.

[52] _____. (2001). Tiempo hasta que ocurre un análisis de supervivencia. Asociación de la sociedad Española de Hipertensión. España.

[53] Molina R. D. (2005). *Análisis de confiabilidad de dado de máquina de inserción de terminales y construcción de un modelo de riesgo proporcional*, Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Industrial. Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México.

[54] Montgomery D. C., Peck E. A. y Vining G. G. (2006). *Introducción al Análisis de Regresión Lineal.* Editorial Continental. Tercera edición. México.

[55] Murthi, V. (2003). A simulation based approach for determining maintenance strategies. The University of Tennessee, Knoxville. December 2003.

[56] Nahmias S. (1999). *Análisis de la Producción y las Operaciones.* Santa Clara University. Ed. Continental, S. A. de C. V., 1a Edición, México

[57] Nazareth J., Borwein J., Borwein P. (2003). *Differentiable Optimization and Equation Solving, A Treatise on Algorithmic Science and the Karmarkar Revolution,* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.

[58] Negelkerke N. (1991). A note on a general definition of the coefficient of determination. Biometrika, 78,691-692.

[59] Nelson W. (1985). *Applied Life Analysis.* John Wiley, 1982. Hallmark text by the leading author.

[60] Nocedal J. y Wrigh S. (2006). *Numerical Optimization.* Springer Science and Business Media, LLC. Second Edition, ISBN-10: 0-387-30303-0

[61] Park M. y Hastie T. (2007). L1 regularization path algorithm for generalized linear models. J. R. Statist. Soc. B, 69, 659-677

[62] Peña D. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes.* Mc Graw Hill. ISBN: 84-481-3610-1.

[63] Pettitt A. N. y Stephens M. A. (1976). Modified Cramer-von Mises Statistics for Censored Data. Biometrika, Vol. 63, No. 2 (Aug., 1976), pp. 291-298.

[64] Pham H. (2006), *Springer Handbook of Engineering Statistics.* Springer-Verlag London Limited.

[65] Piña M., Rodríguez M., Días J. (2005). Superioridad de la regresión general ridge sobre mínimos cuadrados. CULCyT// Enero-Febrero, Año 2, No 6, pp 21-26.

[66] _____, Rodríguez M. y Molina R. (2005). Construcción de un modelo de riesgo proporcional a través de la regresión ridge. CULCyT, Mayo-Junio.

[67] Prentice, R. L. y Gloeckler, L. A. (1978). Regression analysis of grouped survival data with application to breast cancer data. Biometrics. 34, pp. 57-67.

[68] Risk Based Inspection Technology (2008). *API Recommended Practice 581.* Second Edition, Sept. 2008.

[69] Rodriguez, G. (2001). *Appendix A: Review of Likelihood Theory.*

[70] Scheike T. y Sun Y. (2007). Maximum likelihood estimation for tied survival data under Cox regression model via EM-algorithm. Lifetime Data Anal 13:399–420, © Springer Science+Business Media, LLC.

[71] Sevcovic D. y Csajkova A. (2005). On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model. CEJOR 13:169-188, © Physica-Verlag.

[72] Sohn I., Kim J., Jung S., Park C. (2009). Gradient Lasso for Cox Proportional Hazards Model. BIOINFORMATICS, 25(14), 1775-1781.

[73] Stephens, M. A. (1974). EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, 730-737.

[74] Sun W. y Yuan Y. (2006). *Optimization theory and methods: nonlinear programming.* Springer optimization and its applications, Vol 1, pp. 119-301

[75] Sy J. y Taylor J. (2000). Estimation in a Cox Proportional Hazards Cure Model. BIOMETRICS 56, 227-236, March 2000.

[76] Taraman, K. (1974). Multi Machining Output-Multi-Independent Variable Turning Research by Response Surface Methodology. International Journal of Production Research. Vol. 12, pp. 233–245.

[77] Verweij P. y Van Houwelingen H. (1994). Penalized likelihood in Cox regression. StatMed13:2427–2436.

[78] Walter W. Hauck, Jr., Allan Donner. (1977). Wald's Test as Applied to Hypotheses in Logit Analysis. Journal of the American Statistical Association, Vol. 72, No. 360 (Dec., 1977), pp. 851- 853.

[79] Wax Y. (1992). Collinearity diagnosis for a relative risk regression analysis: An application to assessment of diet-cancer relationship in epidemiological studies. Statistics in Medicine, Volume 11, Issue 10, pp. 1273-1287. John Wiley & Sons, Ltd.

[80] Weissfeld, L. A. (1989). A Multicollinearity diagnostic for models fit to censored data. Communications in Statistics–Theory and Methods. 18(6): 2073-2085.

[81] Withmore G. y Schenkelberg F. (1997). Modeling accelerated degradation data using wiener diffusion with a time scale transformation. Lifetime Data Analysis, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp. 27-45.

[82] Xue X., Kim M., Shore R. (2007). Cox regression analysis in presence of collinearity: an application to assessment of health risks associated with occupational radiation exposure. Lifetime Data Anal, (2007), 13:333–350, Springer.

[83] Zacks S. (1992). *Introduction to Reliability Analysis, Probability Models and Statistical Methods.* Springer-Verlag New York Inc.

Anexo A

Apéndice I

Este apartado muestra algunas herramientas y desarrollos necesarios para conformar la metodología propuesta.

A.1. Matriz aumentada S para estimar unos nuevos $\hat{\beta}_R$

La matriz $I^{-1}(\hat{\beta}_j)$ de covarianzas, contiene la información sobre la relación multivariante entre cada una de las variables y el resto. El contenido de la matriz de covarianzas inversa se detalla a continuación (Peña, 2002).

A.1.1.

Por filas y fuera de la diagonal, contiene los coeficientes de regresión de la variable correspondiente a la fila explicada por todas las demás, cambiados de signo y multiplicados por la inversa de la varianza residual. Si llamamos s^{ij} a los elementos de la matriz:

$$s^{ij} = \frac{-\hat{\beta}_{ij}}{s_r^2(i)} \tag{A.1}$$

donde $\hat{\beta}_{ij}$ es el coeficiente de regresión de la variable j para explicar la variable i, y $s_r^2(i)$ es la varianza residual de la regresión. En la diagonal, contiene las inversas de las varianzas residuales de la regresión de cada variable con el resto.

$$s^{ii} = \frac{1}{s_r^2(i)} \tag{A.2}$$

A.1.2.

Si se tiene la matriz particionada S, a la variable 1 le llamaremos y, y el resto lo llamaremos R, entonces:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & c_{1R}^T \\ c_{1R} & S_R \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

donde s_1^2 representa la varianza de la primera variable, c_{1R} el vector de covarianzas entre la primera variable y y el resto; S_R representa la matriz de varianzas y covarianzas del resto. Para obtener su inversa, es necesario estimar la inversa de una matriz particionada. Supongamos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

se puede obtener la inversa de la matriz particionada A, en otra matriz de $2x2$ de manera que los términos diagonales A_{11} y A_{22} sean matrices cuadradas no singulares (Peña, 2002), como se muestra en al ecuacion (A.5).

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_21B^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}B^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

donde $B = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)$. Entonces, para la matriz particionada S, dada en (A.3), la inversa será:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \left(s_1^2 - c_{1R}^T S_R^{-1} c_{1R}\right)^{-1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Además, dado que c_{1R} contiene la relación entre la primera variable y con el resto x, y S_R representa la matriz de covarianzas de X, los coeficientes estimados serían:

$$\hat{\beta}_{1R} = S_R^{-1} c_{1R} \tag{A.7}$$

Para encontrar una relación adecuada, se usa la identidad básica del ANOVA:

$$SST = SSR + SSE, \tag{A.8}$$

donde:

$SST = s_1^2$, la varianza de la primera variable.

$$
\begin{aligned}
SSR &= \hat{y}^T\hat{y} \\
&= \hat{\beta}_{1R}^T S_R \hat{\beta}_{1R} \\
&= c_{1R}^T S_R^{-1} S_R S_R^{-1} c_{1R} \\
&= c_{1R}^T S_R^{-1} c_{1R}
\end{aligned}
$$

$SSE = s_r^2(1)$, donde $s_r^2(1)$ es la varianza residual.

Sustituyendo estos términos en la identidad (A.8), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
s_1^2 &= c_{1R}^T S_R^{-1} c_{1R} + s_r^2(1) \\
s_r^2 &= s_1^2 - c_{1R}^T S_R^{-1} c_{1R}
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

Si se compara esta expresión (A.9) con la del primer término de la matriz S^{-1}dada en (A.6), concluimos que el término diagonal primero de S^{-1}es la inversa de la varianza de los residuos, por lo tanto los términos diagonales de S^{-1}son las inversas de las varianzas residuales en las regresiones entre cada variable y el resto.

Para obtener la expresión de los términos fuera de la diagonal de S^{-1}, aplicaremos la fórmula para la inversa de una matriz particionada (A.5).

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= -B^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\
&= -[s_1^2]^{-1} c_{1R}^T S_R^{-1} \\
&= -[s_r^2(1)]^{-1} \hat{\beta}_{1R}^T
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

Y por lo tanto, las filas de la matriz S^{-1}contienen los coeficientes de regresión (cambiados de signo) de cada variable con relación a las restantes, divididos por la varianza residual de la regresión. Entonces S^{-1} puede escribirse:

$$
S^{-1} = \begin{bmatrix} s_r^{-2}(1) & \dots & -s_r^{-2}(1)\hat{\beta}_{1R}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ -s_r^{-2}(p)\hat{\beta}_{pR}^T & \dots & s_r^{-2}(p) \end{bmatrix}
\tag{A.11}
$$

A.1.3.

Dada la relación anterior, la matriz aumentada para el modelo será:

$$
S = \begin{bmatrix} SST & H\beta \\ (H\beta)^T & H \end{bmatrix},
\tag{A.12}
$$

donde H representa el Hessiano formado por las 2as derivadas parciales de la función de log-verosimilitud con respecto a los parámetros, evaluado en los coeficientes estimados y SST es análogo a s_1^2.

En los modelos de regresión lineal el coeficiente de determinación R^2 representa la proporción de varianza explicada por el modelo, este coeficiente se estima:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SSR}{SST} \tag{A.13}$$

Por otro lado, el coeficiente R^2 para un modelo general está dado por (Madalá 1983), (Cox y Snell 1989), (Magee 1990), (Nagelkerke 1991):

$$R^2 = 1 - \left[\frac{L_0}{L_f}\right]^{2/N} \tag{A.14}$$

Hosmer y Lemeshow (1989) mencionan que éste coeficiente es análogo al coeficiente R^2 de regresión múltiple. Dicho lo anterior, y mediante la relación (A.13) y (A.14), SST se estima como sigue:

$$SST = \frac{SSR}{R^2} \quad , \tag{A.15}$$

donde SSR se estima en la identidad dada en (A.8):

$$SSR = \hat{\beta}^T \hat{H} \hat{\beta} \tag{A.16}$$

Por otro lado, los vectores correspondientes a S_{12} y S_{21} de la matriz dada en (A.12), se estiman como Hessiano ($\hat{H}$) multiplicado por los parámetros $\hat{\beta}_j$. Como ya se mencionó en (A.7), los componentes S_{12} y S_{21}, (es decir c_{1R} y c_{1R}^T) representan la relación que existe entre la primera variable y las demás variables $c_{1R} = x^T y$, la cual puede ser reescrita como:

$$c_{1R} = X^T X \beta = S_{21} \quad y \quad c_{1R} = \left(X^T X \beta\right)^T = S_{12} \tag{A.17}$$

Dada la relación anterior, los componentes S_{12} y S_{21}, estarán dados por:

$$c_{1R} = H\beta = S_{21} \quad y \quad c_{1R} = (H\beta)^T = S_{12} \tag{A.18}$$

A.2. Estimación del valor k

Lawless y Wang (1976), propusieron para estimar el valor k:

$$k = \frac{P_\beta}{\hat{\beta}^T(X^TX)\hat{\beta}} \tag{A.19}$$

Para incluir información del ajuste del modelo para la respuesta predicha, se agrega de la identidad del ANOVA (A.8):

$$k = \frac{P\left[\frac{SST-SSR}{n-p}\right]}{\hat{\beta}^T(X^TX)\hat{\beta}} \tag{A.20}$$

A.3. Estimación de la inversa de la matriz Sk y los nuevos parámetros $\hat{\beta}_R$

Aplicando la inversa de una matriz particionada dada en (A.6), obtendremos Sk^{-1}, la cual contiene la información necesaria para la estimación de los nuevos parámetros $\hat{\beta}_R$. Los componentes fuera de la diagonal contienen los coeficientes (cambiados de signo) divididos por la varianza residual s_r^{-2}.

$$Sk_{12}^{-1} = -[s_r^2(1)]^{-1}\hat{\beta}_{1R}^T \tag{A.21}$$

Y dado que el componente Sk_{11}^{-1} de la matriz es la varianza residual s_r^2, los nuevos $\hat{\beta}_R$ se estiman como:

$$\hat{\beta}_{Rj} = -\frac{Sk_{1j}^{-1}}{Sk_{11}^{-1}} \qquad para\ j = 2, 3, ...p \tag{A.22}$$

A.4. Pruebas de hipótesis para los parámetros estimados $\hat{\beta}_R$

El método comúnmente utilizado para realizar las pruebas de significancia a los parámetros estimados es la Prueba de Wald (*Wald Test*), para el cual es necesaria la estimación del error estándar. Xue et al., en el 2007, demostró que la utilización del pseudo error

estándar tiene un mejor desempeño con respecto al estimado en el método de Regresión Ridge. Este pseudo error estándar se calcula como sigue:

$$se = \left[diag\left((H + Ik)^{-1}\right)\right]^{1/2} \tag{A.23}$$

A.5. Estimación del riesgo $\hat{\Lambda}_0$ y la confiabilidad $\hat{S}_0(t)$ del modelo de Cox

La estimación del riesgo y de la confiabilidad se realiza dependiendo del modelo utilizado, es decir, si el modelo es paramétrico, simplemente se reemplazan los parámetros estimados en la función de riesgo proporcional y de confiabilidad correspondiente a ese modelo paramétrico y se realiza la estimación dados los covariables.

$$\lambda(t, x) = \lambda_0 \exp(X\beta), \tag{A.24}$$

donde λ_0 representa la función de riesgo base paramétrica.

Por otro lado, si el modelo es semi paramétrico, es decir, la función de riesgo base no tiene una forma específica, existen algunos métodos para la estimación del riesgo, entre los cuales destaca el propuesto por Breslow (1972) y el propuesto por Kalbfleich y Prentice (1980).

- **El estimador de Breslow**

La función acumulada de riesgo $\hat{\Lambda}_0 = \int_0^t \lambda_0(u)du$ puede ser estimada por:

$$\hat{\Lambda}_0 = \sum_{j:t_j \leq t} \frac{\delta_j}{\sum_{i \in \Re_j} \exp(\beta^T X_j)}, \tag{A.25}$$

donde, $\delta_j = I(T_j \leq C_j)$. La función de confiabilidad $S_0(t) = \exp[-\Lambda_0(t)]$ puede ser estimada mediante:

$$\hat{S}_0(t) = \exp[-\hat{\Lambda}_0(t)] \tag{A.26}$$

La función de confiabilidad estimada para cada individuo con un valor de covariable esta dada por:

$$\hat{S}_0(t,x) = \exp\left[-\hat{\Lambda}_0 \exp(\hat{\beta}X)\right] \tag{A.27}$$

- **El estimador propuesto por Kalbfleich y Prentice (1980)**

La confiabilidad acumulada de un individuo con covariables es:

$$S(T|X) = [S_0(T)]\exp(X\beta) \tag{A.28}$$

La confiabilidad base estimada $S_0(T)$ es calculada del riesgo acumulado usando:

$$S_0(T) = \prod_{T_t \leq T_0} \alpha_t \tag{A.29}$$

El valor de α_t es la confiabilidad condicional base al tiempo T, el cual se estima resolviendo la función de verosimilitud condicional (A.30):

$$\sum_{d \in D_t} \frac{\theta_d}{1-\alpha_t^{\theta_d}} = \sum_{r \in R_t} \theta_r, \tag{A.30}$$

donde

$$\theta_r = \exp\left(\sum_{i=1}^{p} x_{ir}\beta_i\right) \tag{A.31}$$

Cuando no existen repeticiones a un tiempo particular, D_t contiene un solo individuo y la ecuación (A.30) puede ser solucionada directamente:

$$\hat{\alpha}_t = \left[1 - \frac{\hat{\theta}_t}{\sum\limits_{r \in R_t} \hat{\theta}_r}\right]^{\hat{\theta}_t - 1} \tag{A.32}$$

Por otro lado, cuando existen repeticiones, la ecuación (A.30) debe ser solucionada iterativamente. El punto inicial del proceso iterativo es:

$$\hat{\alpha}_t = \exp\left[\frac{-m_t}{\sum\limits_{r \in R_t} \hat{\theta}_r}\right] \tag{A.33}$$

Una vez obtenida $\hat{\alpha}_t$, el riesgo base se estima mediante:

$$h_0(T_t) = 1 - \hat{\alpha}_t \tag{A.34}$$

El riesgo acumulado es:

$$\hat{H}_0(T) = -\log\left(\hat{S}_0(T)\right) \tag{A.35}$$

Por lo tanto, el riesgo acumulado considerando covariables es:

$$\hat{H}(T|X) = -\exp(X\beta)\log\left(\hat{S}_0(T)\right) \tag{A.36}$$

Y la confiabilidad acumulada incluyendo covariables será:

$$\hat{S}(T|X) = \hat{S}_0^{\exp(X\beta)} \tag{A.37}$$