

**CORPORACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN EN
MATERIALES**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**PLAN DE MANTENIMIENTO PARA SISTEMAS
REEMPLAZABLES BASADO EN UN ANÁLISIS DE
CONFIABILIDAD CONSIDERANDO MODOS DE FALLA
DEPENDIENTES**

TESIS

PRESENTA

Marco Antonio Fuentes Huerta

**MAESTRÍA EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA EN
INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE MANUFACTURA**

Saltillo, Coahuila. Octubre 2015

**PLAN DE MANTENIMIENTO PARA SISTEMAS
REEMPLAZABLES BASADO EN UN ANÁLISIS DE
CONFIABILIDAD CONSIDERANDO MODOS DE FALLA
DEPENDIENTES**

Por

ING. MARCO ANTONIO FUENTES HUERTA

Comité Revisor

Tutor Académico: Dr. David Salvador González González

PICYT Ing. Industrial y Manufactura COMIMSA

Revisor No.1: Dr. Eduardo Marroquín Prado

Profesor-Investigador Instituto Tecnológico de Saltillo

Revisor No.2: Dra. Rina Betzabeth Ojeda Castañeda

Profesora-Investigadora Universidad Autónoma de Coahuila

Tutor de planta: Ricardo Ernesto Pérez Cortes

Saltillo, Coahuila

Octubre 2015

Dedicado

A MIS PADRES:

María de Jesús y Jorge

A MI HERMANO:

Alan

EN ESPECIAL:

Selma De León

A MIS AMIGOS

Agradecimientos

A **Dios** por el don de la vida y permitirme concluir una de las metas más importantes de mi vida profesional.

A mis **padres María de Jesús Huerta y Jorge Fuentes**; y a **mi hermano Alan Fuentes** por su apoyo incondicional.

A **Selma De León** por su apoyo y amistad incondicional.

A mi buen amigo **Alain Valdes** por su apoyo y amistad incondicional.

A mi **tutor, Dr. David González** por compartir sus conocimientos y principalmente por brindarme su amistad.

A los académicos que de forma directa o indirecta contribuyen en mi formación **Dr. Pedro Pérez, Dr. Arturo Reyes**; principalmente al **Dr. Mario Cantú y Dr. Rolando Praga** por su apoyo y conocimientos; gracias por su amistad.

A mi **tutor de planta Ricardo Pérez** por su apoyo durante el proyecto y brindarme su amistad.

Al jurado: **Dr. Eduardo Marroquín Prado y Dra. Rina Betzabeth Ojeda Castañeda** por sus excelentes comentarios y recomendaciones, que contribuyeron en la mejora de este trabajo de investigación.

A el **personal administrativo del posgrado** de COMIMSA por su apoyo en cada una de la actividades para mi formación académica.

Agradezco los apoyos recibidos durante mi formación de maestría a dos importantes Instituciones del ámbito Científico y Tecnológico de este país; sin ellas mi progreso y desarrollo académico, actividades de movilidad e investigación y producción científica no hubieran sido posibles: **El Consejo Nacional en Ciencia y Tecnología (CONACYT)** y a la **Corporación Mexicana de Investigación en Materiales.**

Resumen

Actualmente, las industrias buscan que sus equipos continúen realizando las funciones para las cuales fueron adquiridos, con el fin de cumplir las exigencias del cliente, aumentar su disponibilidad y reducir sus costos. Bajo este contexto, resulta necesario contar con herramientas como el mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM). La metodología RCM determina las actividades de mantenimiento que deben realizarse a los equipos para garantizar que éstos continúen realizando sus funciones bajo un contexto de operación normal. Sin embargo, no solo es una estrategia de mantenimiento, sino un proceso de toma de decisiones basado en el análisis de confiabilidad. Es necesario conocer los tiempos de vida, con el fin de encontrar modelos que sean capaces de representar y pronosticar de forma adecuada estos tiempos para determinar la confiabilidad, e incluir estas estimaciones en la programación de las actividades de mantenimiento. Para determinar la confiabilidad de los equipos o componentes, la metodología RCM propone solamente el modelo paramétrico Weibull, sin embargo no todos los tiempos de falla se ajustan al modelo Weibull, por lo tanto es necesario proponer otros modelos para determinar el que mejor represente el comportamiento de los tiempos de falla. El supuesto común de los modelos de confiabilidad es que las fallas son independientes, sin embargo, el supuesto de independencia entre las fallas no siempre se cumple. Por lo tanto, la estimación de la confiabilidad se vuelve compleja y resulta necesario utilizar modelos que consideren la dependencia entre las fallas. En este trabajo se incluye una selección de modelos multivariados, entre los cuales destaca el modelo de cópula de Gumbel-Hougaard, éste es capaz de considerar de forma apropiada y sencilla la dependencia entre las fallas para obtener resultados adecuados en la estimación de la confiabilidad e incluir estas estimaciones en la programación de las actividades del plan de mantenimiento, con el objetivo de generar ahorros en el costo anual de mantenimiento.

Índice general

Lista de tablas	11
Lista de figuras	12
1. Introducción	14
2. Planteamiento del Problema	18
2.1. Descripción del Problema	18
2.2. Preguntas de Investigación	20
2.3. Hipótesis	21
2.4. Objetivos	21
2.4.1. Objetivo General	21
2.4.2. Objetivos Específicos	21
2.5. Justificación	22
2.6. Delimitaciones	23
3. Revisión Bibliográfica	24
3.1. Antecedentes	24
4. Marco Teórico	30
4.1. Confiabilidad	30

4.1.1.	Confiabilidad de Sistemas	31
4.1.2.	Estimación de Confiabilidad	32
4.2.	Distribución de Probabilidad Paramétrica	34
4.2.1.	Distribución Gamma	35
4.2.2.	Distribución Exponencial	39
4.2.3.	Distribución Weibull	41
4.2.4.	Distribución Weibull Multivariada	46
4.2.5.	Distribución Log-Normal	47
4.2.6.	Distribución Log-Normal Multivariada	50
4.2.7.	Distribución Poisson	50
4.2.8.	Función de probabilidad conjunta	53
4.3.	Estimación de Parámetros	55
4.3.1.	Método de Máxima Verosimilitud	56
4.3.2.	Máxima Verosimilitud con Ajuste para Muestras Pequeñas (MLE-RBA)	59
4.4.	Pruebas de Bondad de Ajuste	59
4.5.	Teoría de Cópulas	64
4.5.1.	Definición de Cópula	64
4.6.	Coefficiente de Correlación Pearson	66
4.7.	Coefficiente de Correlación Kendall	67
4.8.	Bootstrap	68
4.9.	Función de Costo para el Tiempo de Reemplazo	69
5.	Metodología	70
5.1.	Mantenimiento	70
5.2.	Mantenimiento Centrado en Confiabilidad	70
5.2.1.	Metodología del Mantenimiento Centrado en Confiabilidad	71

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	10
5.3. Falla	73
5.4. Análisis Modo y Efecto de Falla (AMEF)	74
5.4.1. Modo de Falla	74
5.5. Metodología Propuesta	75
5.5.1. Pasos Generales de la Metodología Propuesta	76
6. Aplicación y Validación	79
6.1. Aplicación de la Metodología Propuesta	79
6.1.1. Caso 1: Motor Eléctrico de Inducción	80
6.1.2. Caso 2: Máquina de Inyección (PYMCSA)	90
7. Conclusiones	103
A. Publicaciones	110

Índice de tablas

6.1. Tabla de Información de los Modos de Falla.	83
6.2. Resumen para los Tiempos de Falla en el Rotor.	84
6.3. Resumen para los Tiempos de Falla en el Estátor.	84
6.4. Comparación de Modelos.	88
6.5. Tiempos de Falla (Hrs).	95
6.6. Coeficientes de Correlación.	95
6.7. Resumen de Tiempos de Falla Calentamiento de Aceite (MF_1).	96
6.8. Resumen de Tiempos de Falla Falta de Presión (MF_2).	96
6.9. Prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada	96
6.10. Comparación de Modelos (PYMCSA).	101

Índice de figuras

4.1. Función de Densidad Gamma.	36
4.2. Función de Confiabilidad Gamma.	37
4.3. Función de Densidad Exponencial.	39
4.4. Función de Confiabilidad Exponencial.	40
4.5. Función de Densidad Weibull.	42
4.6. Función de Confiabilidad Weibull.	44
4.7. Curva de la Bañera.	46
4.8. Función de Densidad Log-Normal.	48
4.9. Función de Confiabilidad Log-Normal.	49
4.10. Función de Densidad Poisson.	52
5.1. Metodología General RCM.	75
5.2. Metodología Propuesta.	75
6.1. Función de Confiabilidad (Independencia).	85
6.2. Función de Confiabilidad (Dependencia).	87
6.3. Comparación de Funciones de Confiabilidad.	88
6.4. Gráfica de Pareto.	91
6.5. Gráfica de Pastel de Fallas en los Sistemas de la Máquina No 5.	92
6.6. Gráfica de Confiabilidad Independencia (PYMCSA).	97

6.7. Gráfica de Confiabilidad (PYMCSA).	99
6.8. Función de Costo.	100
6.9. Gráfica Fallas (PYMCSA).	102

Capítulo 1

Introducción

Las empresas actualmente aplican metodologías de mantenimiento para cumplir las exigencias del cliente; aumentar la disponibilidad de los equipos y reducir sus costos. Bajo este contexto resulta útil aplicar la metodología del mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM), que se define como un proceso sistemático usado para determinar que debe hacerse para garantizar que cualquier activo físico, continúe realizando las funciones para las cuales fue diseñado, bajo un contexto de operación normal (Mckenna, 1997). Mediante el análisis de confiabilidad la metodología RCM determina las actividades y estrategias de mantenimiento requeridas por los equipos (Moubray, 1997). En el análisis de confiabilidad, la ocurrencia está expresada en términos de la probabilidad de falla, por lo que en su estimación se involucran herramientas de ingeniería de confiabilidad, entre las cuales destaca el análisis Weibull.

En este sentido, la probabilidad de falla es de gran importancia, debido a que es utilizada para administrar las actividades de los planes de mantenimiento, con el fin de predecir y controlar las fallas de los equipos, sistemas o componentes. La probabilidad de falla está en función del tiempo de vida, t , del componente

en cuestión, y se denota por la función de distribución de probabilidad acumulada $F(t)$. Se puede observar que $F(t) = P(T \leq t)$ depende directamente de la vida útil de la máquina, sistema o componente que se esté evaluando, convirtiéndose por consecuencia en una parte fundamental de la estimación de confiabilidad.

Para estimar la probabilidad de falla, es necesario tomar en consideración factores operacionales como la temperatura, el desgaste, parámetros del proceso, tipo de conexión, dependencia entre sistemas, que afecten directamente la probabilidad de falla del sistema o componente.

Si el ambiente operacional tiene efecto en el desempeño del equipo y no es considerado en la estimación de la probabilidad de falla, el resultado de los indicadores de confiabilidad no representará de manera adecuada el comportamiento del equipo o componente y por consecuencia, el plan de mantenimiento centrado en confiabilidad estará basado en indicadores de confiabilidad erróneos, teniendo éstos un impacto negativo en la administración de las actividades del plan de mantenimiento. La estimación de la probabilidad de falla no solo depende de las observaciones, sino también de la correcta aplicación de las herramientas de ingeniería de confiabilidad.

El análisis Weibull es una de las técnicas más utilizadas para estimar la probabilidad de falla basada en los datos obtenidos a través del modo de falla de algún componente. Éste análisis es útil por su capacidad para simular un amplio rango de distribuciones como la exponencial y normal entre otras (Abernethy, 2008). El paso número uno para la realización de un análisis Weibull es la obtención adecuada de los datos de tiempos de vida. Los datos de tiempos de vida (o ciclos de falla) son información para conocer la edad de los componentes o sistemas. El concepto de edad puede representar el tiempo de operación, inicio y fin de actividad, ciclos de fatiga, parámetros etc.

Los modelos de confiabilidad de sistemas en serie, paralelo, conjunto mínimo de

corte, entre otros, suponen que todos los componentes y modos de falla son independientes, sin embargo, éste supuesto no siempre se cumple. Por lo tanto, utilizar modelos que suponen independencia llevarán a tener estimaciones de confiabilidad inadecuadas y en consecuencia el aumento del costo de mantenimiento, los tiempos de ciclo, y la programación de las actividades del plan de mantenimiento será deficiente.

(Huang et al. 2011) muestra los inconvenientes de evaluar la confiabilidad a través de modelos tradicionales (suponen independencia). Encontró que debido al método tradicional, refiriéndose específicamente a un modelo de confiabilidad de sistemas, los indicadores de éste se ven afectados cuando existe dependencia entre los modos de falla, es decir si las fallas están correlacionadas causan indicadores de confiabilidad erróneos.

Además los modelos tradicionales, traerán como consecuencia una frecuencia inadecuada de inspección, reparación o cambio de componentes, la cual se refleja en la programación de las actividades del plan de mantenimiento centrado en confiabilidad. El resultado de lo anterior, será un plan de mantenimiento deficiente.

Existen modelos que consideran los efectos de la dependencia entre los modos de falla. Los modelos multivariados tradicionales Log-Normal y Weibull representan. De forma paramétrica, un modelo de los tiempos de vida. Las cópulas representan de forma no paramétrica, un modelo de la estructura de dependencia de los tiempos de vida. Estos modelos contribuyen en la administración de las actividades de los planes de mantenimiento, ya que la frecuencia basada en estos modelos será adecuada en comparación con la de los modelos tradicionales.

Debido al impacto que representa considerar el supuesto de independencia en la estimación de la confiabilidad de sistemas, y tomando en consideración lo encontrado en la revisión del estado del arte, esta investigación se enfoca en el análisis y

solución del problema de considerar la dependencia entre las fallas, conociendo que la estimación de la probabilidad de falla es un factor determinante para la aplicación del mantenimiento centrado en confiabilidad, así como para la elaboración de los planes de mantenimiento.

El presente documento se estructura en capítulos. Como sigue: en el capítulo dos, se describe el problema, los objetivos, las hipótesis del trabajo y los resultados esperados. El capítulo tres describe algunos trabajos relevantes relacionados con el problema planteado, hallazgos y posibles soluciones encontradas. En el capítulo cuatro se incluyen las herramientas necesarias para estimar la probabilidad de falla, el mantenimiento centrado en confiabilidad y la teoría de cópulas en la cual se basa la metodología propuesta. Además se presentan algunas herramientas como pruebas de bondad de ajuste y correlación. En el capítulo cinco se plantea la metodología, ésta propone considerar la dependencia entre las fallas para realizar de manera adecuada las estimaciones de confiabilidad, con el fin de incluir estas estimaciones en la metodología RCM. El capítulo seis muestra la aplicación y los resultados que se obtuvieron en la utilización de la metodología propuesta. En el capítulo siete se muestran las conclusiones y los comentarios relacionados con el trabajo futuro.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

En este capítulo se presenta el problema y su entorno. En la sección 2.1 se explica el problema de considerar modelos que no representan de forma adecuada los tiempos de falla, la sección 2.3 presenta la hipótesis de trabajo. Los objetivos generales y específicos se muestran en las secciones 2.4.1 y 2.4.2 respectivamente. Así como, el enfoque de solución y los resultados esperados.

2.1. Descripción del Problema

El mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM) es un proceso de toma de decisiones basado en la probabilidad de falla para determinar las actividades que deben realizarse a los equipos. Por lo tanto, estimar la probabilidad de manera adecuada es un tema de investigación, debido a que esta estimación brindará el soporte necesario para la elaboración correcta de los planes de mantenimiento, programas de inspección y administración de las actividades de mantenimiento adecuadas para los sistemas o componentes.

Para representar los tiempos de vida se utilizan modelos tradicionales que pueden clasificarse como paramétricos y no paramétricos, dependiendo de las suposiciones

realizadas acerca de la distribución estadística de los datos en estudio (Harrell, 2001). Los modelos paramétricos considerados en este trabajo son: Weibull, Exponencial, Gamma, Log-Normal mientras que el modelo de confiabilidad de sistemas considerado dependerá de los datos de estudio.

Generalmente, el modelo Weibull representa de forma adecuada los tiempos de vida, sin embargo, en ocasiones éste no presenta un buen ajuste, por lo que se vuelve necesario considerar algunos modelos de probabilidad adicionales. Además, es indispensable incorporar herramientas estadísticas que permitan medir la bondad de ajuste de los modelos para seleccionar el adecuado.

Un supuesto importante para estimar la confiabilidad de un sistema es que todos los componentes son independientes. Sin embargo, se encontró que los modelos clásicos de confiabilidad no son adecuados para representar el comportamiento de los tiempos de vida cuando existe correlación entre las fallas de los componentes, es decir los modos de falla son dependientes. Con esto es posible afirmar que las conclusiones sustentadas en un modelo de confiabilidad tradicional serían incorrectas, generando no solo planes inadecuados sino pérdidas para la empresa.

Debido a lo anterior, es de interés encontrar modelos estadísticos que sean capaces de representar y pronosticar de forma adecuada la confiabilidad de un sistema cuando los tiempos de vida estén correlacionados.

Por lo tanto, es importante considerar una medida de dependencia entre los modos de falla, es decir un índice de correlación; el coeficiente τ de Kendall indica el grado y tipo de correlación por lo tanto es un coeficiente de gran utilidad para medir la dependencia entre las fallas (Huang et al. 2011).

Existen modelos que consideran la dependencia entre las fallas como; los modelos multivariados Log-Normal, Weibull y cópulas. Las cópulas, son funciones bivariadas que acoplan dos funciones de distribución univariadas para construir funciones de dis-

tribución conjunta. Estas representan en forma paramétrica un modelo de la dependencia en las distribuciones conjuntas de variables aleatorias (Escarela y Hernández, 2009). Estos modelos pueden ser de gran utilidad para estimar la probabilidad de falla y trabajar con los indicadores de confiabilidad adecuados.

Debido al gran impacto que tiene el supuesto de independencia de los modelos de confiabilidad de sistemas para estimar la probabilidad de falla, la presente investigación se enfoca principalmente en el análisis y solución del problema generado por la dependencia entre los modos de falla, destacando la importancia de los modelos que consideran la correlación entre las fallas para la estimación de la confiabilidad, esto con el fin de incluir las estimaciones en la aplicación de la metodología RCM.

2.2. Preguntas de Investigación

- ¿Qué modelo es adecuado para representar el tiempo con el fin de predecir la probabilidad y el tiempo de vida útil de los equipos?
- ¿Es posible determinar un modelo que considere dependencia entre las fallas de los componentes que constituyen un equipo o sistema?
- Con el modelo obtenido ¿Será posible describir el comportamiento de las fallas en el equipo de manera adecuada?
- ¿Qué tipo de modelo es paramétrico o no paramétrico ?
- ¿Cómo se construye la distribución conjunta? y ¿Cómo se obtiene la marginal?
- ¿Puede una actividad de mantenimiento programado reducir la probabilidad de fallas múltiples y las consecuencias a un nivel aceptable?

2.3. Hipótesis

Mediante la metodología que construye un modelo de confiabilidad adecuado utilizado en la metodología RCM, es decir, considerando la dependencia entre las fallas, será posible establecer una frecuencia de inspección adecuada y reducir los costos de mantenimiento en al menos un 30 %.

2.4. Objetivos

Para la disertación se plantean los siguientes objetivos, que definen los propósitos específicos de la presente investigación.

2.4.1. Objetivo General

Desarrollar una metodología para construir un modelo que considere correlación entre los modos de falla con el fin de estimar la confiabilidad e incluirla en el RCM para administrar las actividades y establecer frecuencias de inspección.

2.4.2. Objetivos Específicos

- Encontrar una forma que permita medir el grado y tipo de correlación entre los modos de falla.
- Establecer criterios para la realización de un modelo de análisis que nos permita estimar: confiabilidad de un componente o sistema, probabilidad de falla, tasa de falla y vida media o remanente de manera conjunta, para administrar las actividades del plan de mantenimiento basado en la metodología RCM.
- Seleccionar una prueba que sea capaz de ayudar en el proceso de selección del modelo de confiabilidad.

- Dar soporte estadístico a la probabilidad de falla a través de la construcción de un modelo que considera la dependencia entre los modos de falla.
- Determinar la frecuencia de las actividades y tipo de reparación del plan de mantenimiento, con base en la probabilidad de falla obtenida mediante el análisis de confiabilidad.

2.5. Justificación

Aún y cuando las industrias han evolucionado a lo largo del tiempo, es común encontrar empresas que carecen de metodologías para realizar actividades de mantenimiento. El no programar las actividades de mantenimiento aumenta el tiempo y costo de reparación de la falla, además las fallas interrumpen la producción aumentando las pérdidas por paro de línea. Una de las tareas del mantenimiento es agregar valor al producto (Moubray,1997).

Las empresas aplican estrategias de mantenimiento con el propósito de:

- Aumentar la disponibilidad del equipo.
- Mejorar el uso de los recursos.
- Reducir los costos de mantenimiento.

La metodología del mantenimiento centrado en confiabilidad basa su plan en la estimación de la probabilidad de falla. Por lo tanto, resulta necesario estimar la confiabilidad de forma correcta y confiable, con el objetivo de que el plan de mantenimiento tenga un soporte estadístico adecuado.

Para determinar la frecuencia de las actividades del plan de mantenimiento, la metodología RCM utiliza modelos que suponen independencia entre los modos de

falla, esto hace posible que se puedan presentar dos casos; 1) sobre mantenimiento, lo cual tendrá un costo extra y 2) falta de mantenimiento, esto implica paros inesperados de producción. Si se presenta cualquiera de estos casos, es importante, restablecer la frecuencia de mantenimiento.

La presente investigación se enfoca específicamente a proponer una metodología que incluya un modelo que considere la dependencia entre los modos de fallas en la metodología del mantenimiento centrado en confiabilidad, con el fin de estimar la probabilidad de falla de forma adecuada y, en consecuencia, realizar un plan de mantenimiento basado en estimaciones adecuadas de confiabilidad.

2.6. Delimitaciones

Actualmente existen diversas estrategias de mantenimiento, sin embargo, la investigación se enfoca exclusivamente en la metodología del RCM, debido a que ésta basa sus planes de mantenimiento en el análisis de confiabilidad. Dada la amplitud de la metodología RCM, determinar la probabilidad de falla es una de las partes vitales, es aquí donde se utilizan los modelos dependientes, éstos tienen como restricción solo modelar dos modos de falla en donde sus marginales se supone se distribuyen de forma Weibull, limitando el plan de mantenimiento a las características propias del equipo.

Las limitaciones de la presente investigación son:

- El enfoque de los aspectos teóricos en la metodología del mantenimiento centrado en confiabilidad.
- La elaboración del plan de mantenimiento se limita a las características propias del equipo.

Capítulo 3

Revisión Bibliográfica

En este capítulo se presenta el estado del arte referente al enfoque de incluir en un modelo, la dependencia entre las fallas que influyen en la estimación de la confiabilidad del sistema, la aplicación de la metodología RCM mantenimiento centrado en confiabilidad, la programación de las actividades de mantenimiento, además de su utilización y desarrollo, para modelar el comportamiento de las fallas y por consecuencia mejorar la confianza de la probabilidad de falla estimada.

3.1. Antecedentes

En el proceso de revisión de trabajos relevantes relacionados con la aplicación del mantenimiento centrado en confiabilidad, se observó lo siguiente. En el trabajo presentado por (Yssaad et al. 2013), se propone un procedimiento práctico para desarrollar un programa de mantenimiento efectivo en los sistemas de una planta de distribución eléctrica, ubicada al noroeste de Argelia. El procedimiento está basado principalmente en mantenimiento centrado en confiabilidad. El mantenimiento centrado en confiabilidad establece la prioridad de cada uno de los modos de falla y

secciona actividades efectivas de mantenimiento para los modos de falla críticos. La estimación de los parámetros para las distribuciones, disponibilidad y mantenibilidad se basan en los reportes de fallas proporcionados por el operador. La distribución Weibull de dos parámetros, es típicamente usada para modelar el desgaste o la fatiga de los equipos y/o componentes. Debido a que los datos se ajustan a un modelo Weibull, es estimada la confiabilidad mediante éste modelo probabilístico. La solución al problema fue cambiar los cables de las líneas generales ya que tenían un alto tiempo de operación y no los habían remplazado anteriormente. La confiabilidad previa al análisis era de 4.5 %, posteriormente a las acciones tomadas con los resultados del análisis de confiabilidad aumentó al 50 % para un periodo de 120 meses. Un aporte importante además del aumento de la confiabilidad es que mediante el mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM) se optimizó el plan de mantenimiento de los equipos de la planta de distribución eléctrica, lo anterior se logró mediante la utilización del AMEF por su contribución en la identificación de las funciones críticas del sistema.

Otro de los artículos relacionados con la aplicación del mantenimiento centrado en confiabilidad es el trabajo realizado por (Deshpande y Mahant 2013). En este trabajo se aplica el RCM con el fin de desarrollar un programa de mantenimiento para una máquina de estiramiento hidráulico. Esta máquina se utiliza para enderezar y estirar el aluminio de alta resistencia. Con el RCM se buscaba encontrar el costo efectivo de mantenimiento con las debidas consideraciones para el manejo y la seguridad ambiental. Para llevar a cabo la aplicación de RCM fue necesario el estudio de las funciones, fallas funcionales, los modos de falla y los efectos de la máquina. Para el análisis se tenía una muestra recolectada durante 2 años, en las cuales se estudió el tiempo de inactividad y la pérdida de producción relacionada

con la inactividad. El objetivo de este estudio era reducir al mínimo los costos de mantenimiento obtenidos en los años anteriores. Mediante la implementación de la metodología RCM, se obtuvo una minimización significativa en el tiempo y pérdidas por inactividad, además resultados positivos en términos de seguridad y medio ambiente.

Continuando con el mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM), en el trabajo realizado por (Chen y Zhang 2012), se consideran que el mantenimiento centrado en confiabilidad es un tipo de tecnología importante en el campo de mantenimiento industrial, que se puede aplicar para mejorar la confiabilidad, disponibilidad de los equipos y reducir los costos operativos y mantenimiento. En este trabajo se presenta la evolución del mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM) en China para las plantas de energía nuclear en las que se ha implementado. El (RCM) es una clase de método usado para determinar las necesidades de mantenimiento preventivo y optimizar el sistema de mantenimiento para los equipos, el cual ha logrado resultados significativos en la mejora de la seguridad, confiabilidad y economía en la industria de la energía nuclear en China.

La aplicación del mantenimiento centrado en confiabilidad en países como Estados Unidos, Francia, Sudáfrica, Corea del Sur, España, Gran Bretaña entre otros, podría ayudar especialmente a promover la administración de equipos y mantenimiento en las plantas de energía nuclear, por consecuencia se obtendría como beneficio mejorar la seguridad, confiabilidad y la economía de manera efectiva.

En el proceso de revisión de la literatura sobre el tema de confiabilidad, se encontró que el trabajo realizado por (Lijun et.al 2012), muestra como optimizar el mantenimiento realizado en una planta nuclear mediante la aplicación del manteni-

miento basado en condición. Este artículo hace una comparación entre las diferentes tipos de estrategias de mantenimiento actuales, además se muestran los beneficios obtenidos al realizar una estrategia de mantenimiento. El objetivo para la planta era garantizar que los recursos, sistemas y componentes operaran siempre en un tiempo de vida seguro y rentable. Como resultado el RCM mejoró la eficiencia del equipo de la compañía, también produjo una base para realizar el análisis de confiabilidad de los componentes del sistema, centrando la confiabilidad e integrando los aspectos económicos y de riesgo. La utilidad del RCM fue garantizar la seguridad, la mejora de la confiabilidad del equipo, los costos efectivos de mantenimiento y el desarrollo sustentable.

Otros trabajos encontrados sobre la estimación de la confiabilidad que consideran la dependencia, por ejemplo (Huang et.al 2011), mencionan que en el estudio de la estimación de la confiabilidad es común suponer que los modos de falla múltiples de un componente son independientes, sin embargo ese supuesto no siempre se cumple. La falla de un componente se presenta generalmente debido al estrés y las características inherentes. Huang propone un modelo que puede describir la dependencia entre los modos de falla, las cópulas son un buen camino para modelar y medir la dependencia entre los tiempos de falla de las variables aleatorias. El enfoque de este artículo es evaluar la confiabilidad de un procesador de audio cuando los modos de falla están correlacionados a través de una función cópula. Las pruebas del procesador de audio mostraron que existen dos modos falla: la amplitud de salida fuera de tolerancia y la no existencia de señal en el canal. Ellos suponen que los tiempos de falla se distribuyen en forma Weibull y Exponencial entonces usan la cópula de Gumbel-Hougaard para construir el modelo que proponen y así poder realizar el análisis de confiabilidad para el componente de audio.

En la revisión del tema, de dependencia entre las variables, (Branco 2010), menciona que existe un problema para identificar y trabajar con la estructura de la dependencia entre algunos modos de falla. Sin embargo, propone un modelo de cópulas para trabajar con los modos de falla correlacionados para poder tener estimaciones de confiabilidad adecuadas. El tiempo de falla de un sistema con varios modos de falla puede ser considerado como un sistema en serie o un modelo de riesgos en competencia, donde cada modo de falla es un componente del sistema en serie y cada componente tiene un tiempo de vida. Entonces el sistema fallará cuando el modo de falla con el tiempo de vida más corto falle. La cópula permite relacionar la dependencia entre las variables aleatorias individuales que corresponden a cada riesgo de falla; realizaron el estudio con tiempos de falla Weibull y Log-normal. En este artículo destacan a las cópulas como una herramienta útil para la estimación de los tiempos de falla. El estimador de confiabilidad de la cópula captura la estructura de dependencia entre los tiempos asociados a dos modos de falla que se distribuyen Log-Normal o Weibull.

En el trabajo que realizó (Manotas et.al 2008), la metodología tradicional asume independencia entre los modos de falla concurrentes para la estimación de la función de confiabilidad, estudios recientes revelan posibles errores de estimación que éste supuesto conlleva, cuando realmente existe dependencia entre los modos de falla. En éste artículo se estudia el efecto causado por dos modos de falla, los modos de falla son las causas o diferentes maneras en que puede fallar un sistema, ya que existen muchos sistemas, subsistemas y componentes que tienen más de un modo de falla. El tiempo de falla de un sistema con dos modos de falla puede ser modelado como un sistema en serie.

Los dos modos de falla que se identificaron en el equipo de rayos fueron; el modo de falla uno; descargas eléctricas y desgaste, para posteriormente realizar el análisis de confiabilidad.

El trabajo de (Torres 2012), muestra que las políticas de mantenimiento se eligen de acuerdo a las fallas que se presentan en los equipos y los efectos que tiene implementar de forma adecuada un plan de mantenimiento centrado en confiabilidad. Un aporte importante de este estudio fue la identificación de las causas contribuyentes al fallo de los sistemas analizados, ya que el RCM permite valorar adecuadamente la alta contribución de los fallos por causas mecánicas. Para realizar la optimización del mantenimiento a través del RCM debieron priorizar esfuerzos, primero definiendo el sistema, después realizando el análisis de confiabilidad del sistema o subsistemas, en el cual determinaron los componentes críticos, y la recomendación de políticas de mantenimiento. Estableció la prioridad de las intervenciones de mantenimiento y los estudios de causas de fallas; realizó una clasificación de las fallas por equipos, el RCM le ayudó a determinar el programa de mantenimiento y las tareas que debieron realizarse para que los equipos continuarán operando.

Capítulo 4

Marco Teórico

En el presente capítulo se mencionan las herramientas estadísticas necesarias para la modelación y obtención de la probabilidad de falla considerando la correlación entre los modos de falla así como, algunos temas relevantes que se utilizarán en esta investigación.

4.1. Confiabilidad

La confiabilidad es un concepto de calidad basado en el tiempo. También es la probabilidad de que un producto funcione en forma correcta durante un período dado, en su aplicación prevista (Murthi 2003).

Autores como Dodson (1994) y Gertsbakh (2000), mencionan que un análisis de confiabilidad se basa principalmente en los siguientes pasos, los cuales más adelante se explican a detalle:

1. Información acerca del componente o sistema que se va a analizar (muestra de tiempos de vida).
2. Pruebas de bondad de ajuste para determinar la distribución de los datos en

caso de que se ajusten a alguna distribución.

a) Paramétrica.

- Discreta.
- Continua.

Estimación de los parámetros de la distribución que representa adecuadamente el comportamiento de los datos.

b) No paramétrica.

Utilización de modelos no paramétricos.

3. Estimación de los indicadores de confiabilidad.

4.1.1. Confiabilidad de Sistemas

Supongamos que el estado del componente i es descrito por una variable aleatoria binaria X_i , que se define como:

$$P(X_i = 1) = p_i, \quad P(X_i = 0) = 1 - p_i \quad (4.1)$$

Donde 1 corresponde al estado de operación y 0 corresponden al estado de falla.

Se supondrá que todos los componentes son mutuamente independientes. Esto implica una simplificación formal para los componentes independientes, la distribución conjunta de X_1, X_2, \dots, X_n está completamente determinada por la confiabilidad de los componentes p_1, p_2, \dots, p_n

Denotamos por $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ el vector de estado del sistema. Este ahora es un vector aleatorio, correspondiente a la función de la estructura del sistema $\phi(X) = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ se convierte en una variable aleatoria binaria: $\phi(X) = 1$ corresponde al estado de operación y $\phi(X) = 0$ corresponde al estado de falla.

La confiabilidad del sistema r_0 es la probabilidad de que la función de la estructura del sistema, corresponda al estado de operación (sea igual a 1).

$$r_0 = P(\phi(X) = 1) \quad (4.2)$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$r_0 = E[\phi(X)] \quad (4.3)$$

Modelo de Confiabilidad para Sistemas en Serie

Los componentes de un sistema están conectados en serie si la falla de cualquiera de ellos conduce a la falla del sistema. La tasa de falla de un sistema en serie es igual a la suma de las tasas de falla de sus componentes. Teniendo en cuenta que la función confiabilidad $R(t)$ de un componente se define como su probabilidad de operación (Baeza, 2003).

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i \quad (4.4)$$

4.1.2. Estimación de Confiabilidad

Una parte considerable de la teoría de confiabilidad, se ocupa de los patrones de falla para componentes individuales o sistemas de componentes, sin embargo de estos se derivan temas para estrategias de reemplazo por edad las cuales conciernen a la economía de reemplazar el equipo antes de que falle para disminuir la probabilidad de que ocurra un error o falla durante la operación. En esta sección se muestran las bases para la estimación de la confiabilidad, probabilidad de falla, tasa de fallas entre otros elementos.

Además de las funciones de distribución acumulada $F(x)$ y de densidad $f(x)$ de

la variable aleatoria t , son de interés otras relaciones; en el caso de $f(t)$ y $F(t)$ es como sigue:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (4.5)$$

Una de las funciones de interés es la función de confiabilidad (llamada también función de supervivencia), esta función está definida como:

$$R(t) = P\{T \leq t\} = 1 - F(t) \quad (4.6)$$

La función $R(t)$, representa la probabilidad de que un componente nuevo sobreviva más del tiempo t . Existe una relación fundamental en la teoría de confiabilidad a la cual se le llama función de tasa de fallas o función de frecuencia de fallas y esta dada por:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (4.7)$$

La función de tasa de fallas representa la rapidez de cambio de la probabilidad condicional de falla en el momento t . Se puede considerar como una medida de la probabilidad de que un componente que ha sobrevivido hasta el tiempo t falle en el siguiente instante.

Otros indicadores importantes son el Tiempo Medio Entre Fallas (MTBF), el Tiempo Medio a la Falla (MTTF) y el Tiempo Medio de Reparación (MTTR), los cuales se utilizan para calcular la disponibilidad del equipo. El indicador MTTF es el tiempo medio en que trabajará un sistema antes de que falle por primera vez, MTBF es el tiempo medio de operación normal entre fallas y el MTTR es el tiempo medio real utilizado para arreglar la falla y restaurar un equipo después de una falla funcional (Gertsbakh, 2000).

4.2. Distribución de Probabilidad Paramétrica

La distribución de probabilidad $F(x)$ modela los resultados obtenidos de un experimento aleatorio. Por ejemplo, para un número dado x , la probabilidad $P(X \leq x)$ es

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx \quad (4.8)$$

Propiedades de $F_x(x)$

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)_x = 1$
- 3) $P(a < x < b) = \int_a^b f_x(x) dx$
- 4) $f_x(x) = \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}$

donde es $f_x(x)$ función de densidad y $F_x(x)$ se le denomina la función de probabilidad acumulada de la variable aleatoria x y representa la probabilidad de que la variable no exceda el valor x . La distribución de probabilidad depende de la naturaleza de los datos que contenga la muestra, esta puede ser una distribución de variable aleatoria discreta o distribución de variable aleatoria continua (Dodson y Nolan, 1999).

Debido a que en confiabilidad la muestra está conformada por tiempos de falla del componente en cuestión, los datos obtenidos serán variables aleatorias continuas. Cabe destacar, que la variable aleatoria t es continua en el intervalo $[0, \infty]$, es decir $t \geq 0$, debido a la característica principal del tiempo. Por esta razón, los modelos comúnmente utilizados para representar este tipo de datos son el Gamma, Exponencial, Weibull y Log-Normal. Estos modelos se presentan a continuación.

4.2.1. Distribución Gamma

La Distribución Gamma es una distribución continua que describe variables aleatorias que están limitadas a un extremo. La distribución Gamma es comúnmente usada para modelar el tiempo de vida de sistemas. Si un evento ocurre después de que n eventos exponencialmente distribuidos ocurren secuencialmente, la variable aleatoria resultante sigue una distribución Gamma. Matemáticamente, si $y_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ y t_1, t_2, \dots, t_n están distribuidos exponencialmente con tasas de fallas idénticas, entonces y_n sigue una distribución Gamma.

La función de distribución Gamma es:

$$f(t) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} t^{(\eta-1)} e^{-\lambda t} \quad t \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.9)$$

Donde:

η : Es el parámetro de forma.

λ : Es el parámetro de escala.

$\Gamma(\eta)$: Es la función Gamma de Euler:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(n-1)} dx \quad (4.10)$$

La media o valor esperado de la distribución Gamma esta dada por:

$$E(t) = \frac{\eta}{\lambda} \quad (4.11)$$

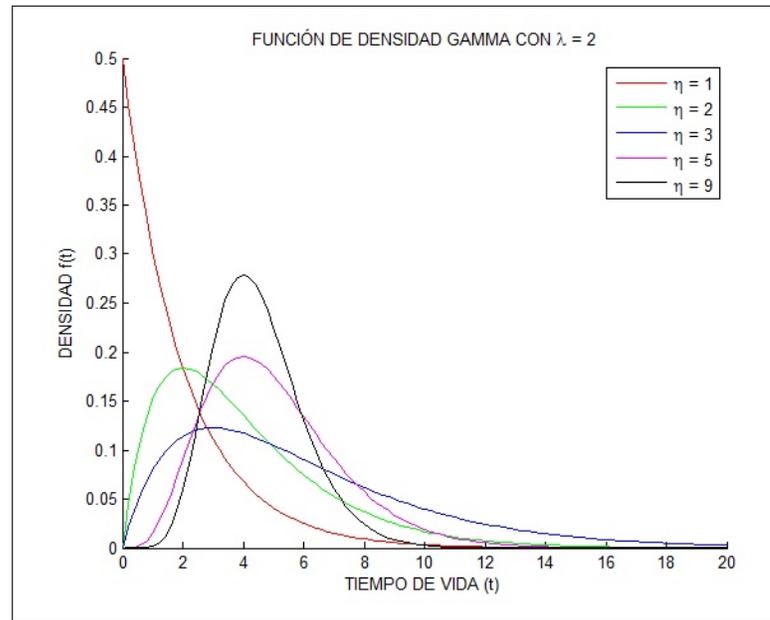


Figura 4.1: Función de Densidad Gamma.

La varianza de la distribución Gamma es:

$$V(t) = \frac{\eta}{\lambda^2} \quad (4.12)$$

Los parámetros de la distribución Gamma pueden ser estimados mediante las expresiones:

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{s^2} \quad (4.13)$$

$$\hat{\eta} = \hat{\lambda} \bar{x} \quad (4.14)$$

Donde:

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$: Es la varianza de la muestra.

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$: Es el promedio de la muestra.

Éstas ecuaciones están basadas en el método de igualdad de momentos. Las estimaciones por otro método de nombre máxima verosimilitud tienen propiedades

distribucionales deseables. Este método se mostrará en un apartado posterior.

La función de probabilidad Gamma es muy versátil, cuando $\eta = 1$, la distribución Gamma se reduce a la distribución exponencial. Cuando η es un entero positivo, es una distribución Erlang. En el caso de $\eta = 2$, la distribución Gamma se reduce a la distribución Chi-cuadrada con $v = 2\eta$ grados de libertad. Además, la distribución Gamma se aproxima a la distribución Normal cuando η es suficientemente grande.

La función de confiabilidad no existe en forma cerrada, a menos que el parámetro η sea restringido a valores enteros. Para este caso en especial la función de confiabilidad Gamma será:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad t \geq 0 \quad (4.15)$$

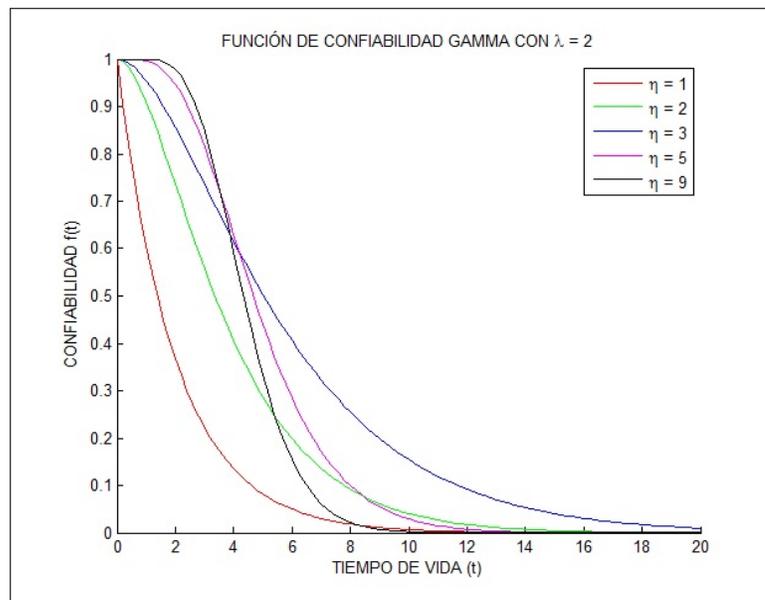


Figura 4.2: Función de Confiabilidad Gamma.

La función de la tasa de fallas de la distribución Gamma no existe en forma

cerrada, a menos que el parámetro η sea restringido a valores enteros (Zacks, 1992).

Para este caso especial la función de tasa de fallas será:

$$h(t) = \frac{\frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} t^{(\eta-1)} e^{-\lambda t}}{\sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}, \quad t \geq 0 \quad (4.16)$$

Una opción para la función acumulada de probabilidad Gamma es la función de Gamma regularizada:

$$F(t; \eta, \lambda) = \frac{\Gamma(\eta, \lambda/t)}{\Gamma(\eta)} \quad (4.17)$$

donde el numerador es la función Gamma incompleta por arriba $\Gamma(\eta, \lambda/t) = \int_{\lambda/t}^{\infty} t^{(\eta-1)} e^{-t} dt$ y el denominador es la función Gamma dada por la ecuación (4.10).

4.2.2. Distribución Exponencial

La distribución exponencial es una distribución continua relacionada con la distribución de probabilidad discreta Poisson. Si el número de fallas por unidad de tiempo sigue una distribución Poisson con parámetro λ , entonces el tiempo medio entre fallas (MTBF) sigue una distribución exponencial. Además, como ya se mencionó, la distribución exponencial tiene una función de tasa de fallas constante.

La distribución exponencial, es una distribución de un solo parámetro, expresado en términos de su media β , o el inverso de su media $\lambda = \frac{1}{\beta}$. La función de densidad exponencial en términos del parámetro λ es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.18)$$

Donde:

$\frac{1}{\lambda}$: La media de la distribución.

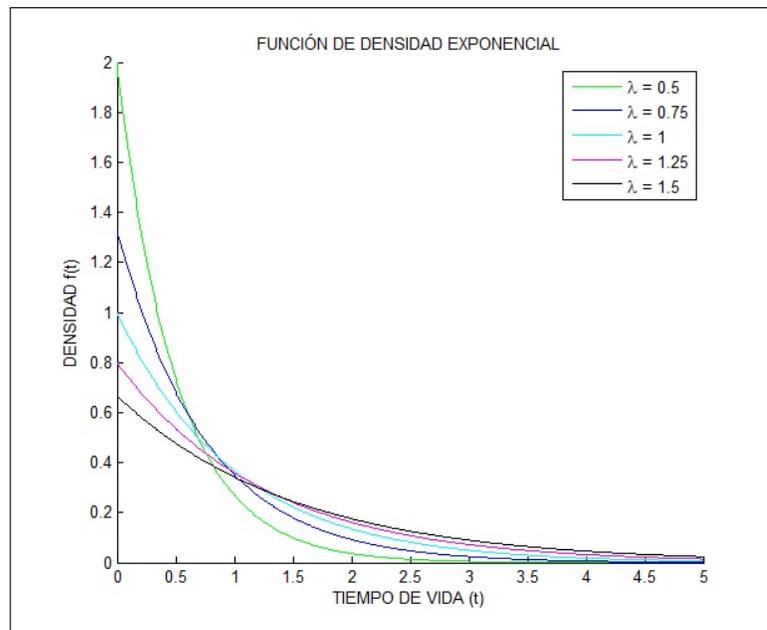


Figura 4.3: Función de Densidad Exponencial.

La función de confiabilidad exponencial está dada por:

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (4.19)$$

La figura 4.4 muestra la función de confiabilidad exponencial.

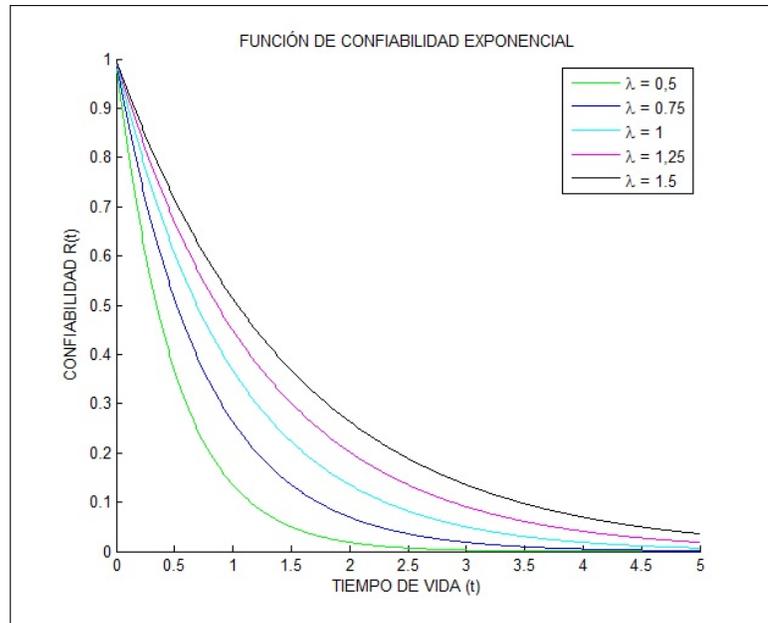


Figura 4.4: Función de Confiabilidad Exponencial.

Además, la función de tasa de fallas es:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (4.20)$$

La función de tasa de fallas exponencial es constante, ésta tasa de falla es única de la distribución exponencial y es debido a la propiedad de falta de memoria de la distribución. “Falta de memoria” significa que la probabilidad de falla en un intervalo de tiempo específico es la misma que al inicio de intervalo (Dodson y Nolan, 1999). La media y la varianza de la función de distribución Exponencial.

La media de la función de distribución exponencial es:

$$\mu = \beta = \frac{1}{\lambda} \quad (4.21)$$

La varianza de la distribución exponencial es:

$$\sigma^2 = \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.22)$$

4.2.3. Distribución Weibull

La distribución Weibull fue desarrollada por Waloddi Weibull en 1937 y publicada en 1951 en el artículo “A Statistical Distribution Function of Wide Applicability” mostrando el amplio rango de aplicabilidad de la distribución. Se demostró además la versatilidad de la distribución para ser usada con muestras pequeñas y su flexibilidad para ser ajustada a una gran variedad de conjuntos de datos. Dadas sus características, la distribución Weibull ha sido ampliamente usada especialmente en el campo de la confiabilidad.

Además de ser la función de densidad más útil para los cálculos de confiabilidad, el análisis de la distribución de Weibull proporciona la información necesaria para la solución de problemas, clasificación del tipo de fallas, programación de planes de mantenimiento y determinación de frecuencias de inspección (Abernethy,2008). La función de densidad de probabilidad Weibull se define como:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (4.23)$$

Donde:

β : Es el parámetro de forma.

η : Es el parámetro de escala (vida característica).

El parámetro de forma β es continuo y positivo; el parámetro de escala η puede tomar valores discretos como por ejemplo ciclos; sin embargo esto es aceptable solo si la magnitud de los datos es suficientemente grande. El dominio para estas variables es: $0 < \beta < \infty$ y $0 < \eta < \infty$. Típicamente, el parámetro β toma valores entre 0.5 y 8. Para la distribución Weibull de dos parámetros, η es conocida como la vida característica del componente en cuestión.

- 1) Áreas de aplicación. Considerando diferentes valores del parámetro β , la función de densidad Weibull toma distintas formas, como se muestra en la figura (4.5).

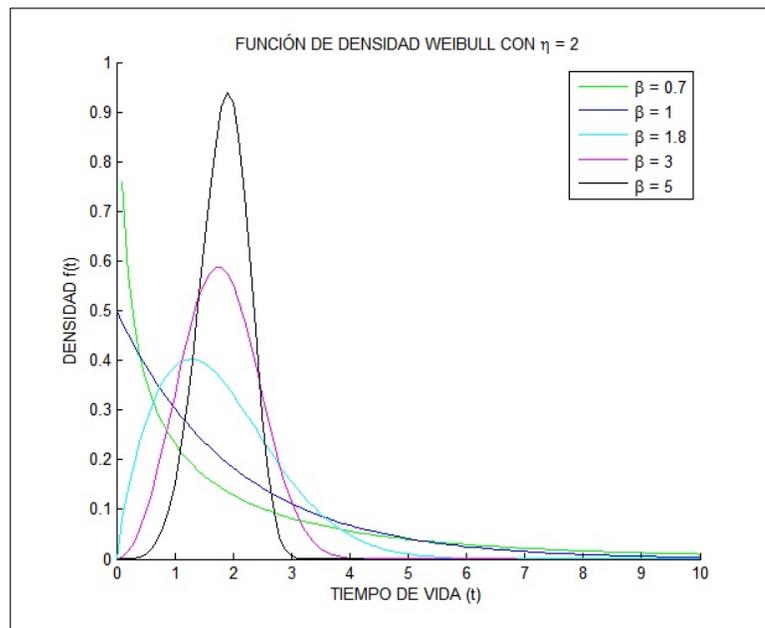


Figura 4.5: Función de Densidad Weibull.

La función de distribución Weibull puede ser usada en una amplia variedad de situaciones dependiendo del valor de β , con la cual puede ser aproximada con algunas distribuciones (Gertsbakh, 2000). Por ejemplo si:

$\beta = 1$: La distribución Weibull es idéntica a la distribución exponencial.

$\beta = 2$: La distribución Weibull es idéntica a la distribución Rayleigh.

$\beta = 2.5$: La distribución Weibull se aproxima a la distribución Log-Normal (Estas distribuciones son muy aproximadas si el tamaño de muestra es mayor que 50).

$\beta = 3.6$: La distribución Weibull se aproxima a la distribución Normal.

A pesar de su flexibilidad, existen algunas fallas observadas que no pueden ser modeladas por la distribución Weibull.

2) Vida media y Varianza.

La media o valor esperado (MTTF) de la distribución Weibull es:

$$\mu = \eta \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (4.24)$$

Donde:

$\Gamma(n)$: Es la función Gamma de Euler dada en (4.10)

Cuando $\beta < 1$, la media es mayor que η y se aproxima a infinito mientras que β tiende a cero. Cuando $\beta = 1$, la media es igual a η .

- La varianza de la distribución Weibull es:

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (4.25)$$

La varianza en (4.25) de la distribución Weibull se aproxima a infinito cuando β se acerca a cero y se aproxima a cero cuando β se acerca a infinito. En general el k -ésimo momento de la distribución Weibull con respecto al origen

está dado por la ecuación (4.26):

$$\mu'_k = \eta^k \cdot \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right) \quad (4.26)$$

3) Función de Confiabilidad y tasa de fallas.

La función de confiabilidad Weibull describe la probabilidad de sobrevivencia en función del tiempo y se representa por (4.27):

$$R(t) = \int_t^\infty \frac{\beta (x)^{\beta-1}}{\eta^\beta} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} dx = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (4.27)$$

La función de confiabilidad (o sobrevivencia) es el complemento de la función de la probabilidad acumulada $F(t)$:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (4.28)$$

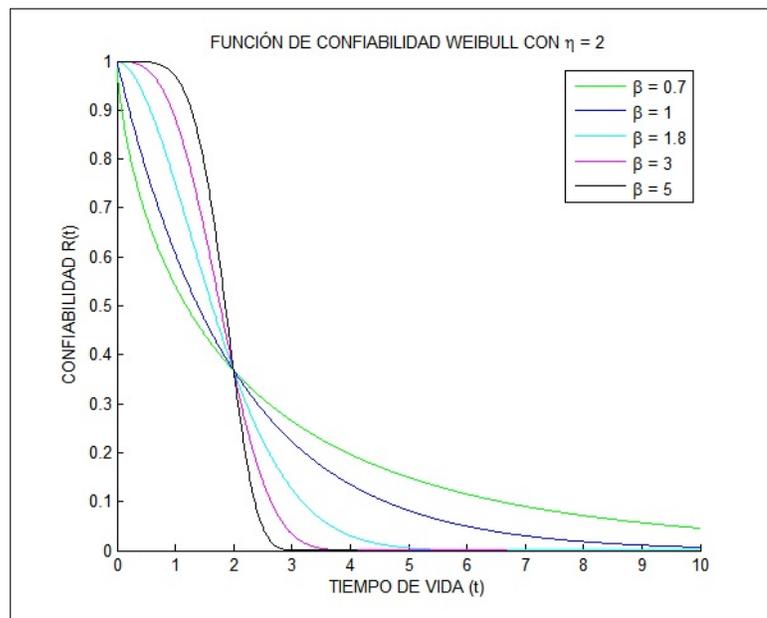


Figura 4.6: Función de Confiabilidad Weibull.

La figura (4.6) ilustra el efecto del parámetro β sobre la función de confiabilidad. Para el caso de $\beta < 1$, la tasa de cambio en la confiabilidad al inicio decrece bruscamente y después se estabiliza. Este es el resultado de fallas por mortalidad infantil. Para el caso de $\beta = 1$, la tasa de cambio en confiabilidad gradualmente decrece; como resultado de una tasa de fallas constante. Para el caso de $\beta > 1$, la tasa de cambio en confiabilidad al inicio decrece lentamente y después decrece bruscamente cuando se va alcanzando la vida característica.

4) La curva de la bañera.

La función de tasa de fallas es obtenida mediante la división de la función de probabilidad Weibull (4.23) dividida por la función de confiabilidad (4.27):

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (4.29)$$

Esta función conocida también como la función de tasa de falla instantánea, es usada para representar la curva de la bañera mostrada en la figura (4.7), en la cual se observan tres situaciones correspondientes a un tipo de falla específico. La primera parte se caracteriza por una tasa de falla decreciente ($\beta < 1$). Un sistema o componente con una función de tasa de fallas decreciente presenta fallas tempranas, las cuales son fallas prematuras causadas por materiales defectuosos, materiales inadecuados, manufactura pobre o falla en la inspección. La segunda sección de la curva se caracteriza por una tasa de falla constante ($\beta = 1$). Las fallas ocurren a una tasa constante, es decir son independientes del tiempo, esto se conoce como la propiedad de la falta de memoria. La tercera sección se caracteriza por una tasa de falla creciente ($\beta > 1$). Esta sección representa a los componentes que presentan desgaste por la edad. El compo-

nente con mayor edad es el que tiene una mayor probabilidad de fallar (Dodson, 1994).

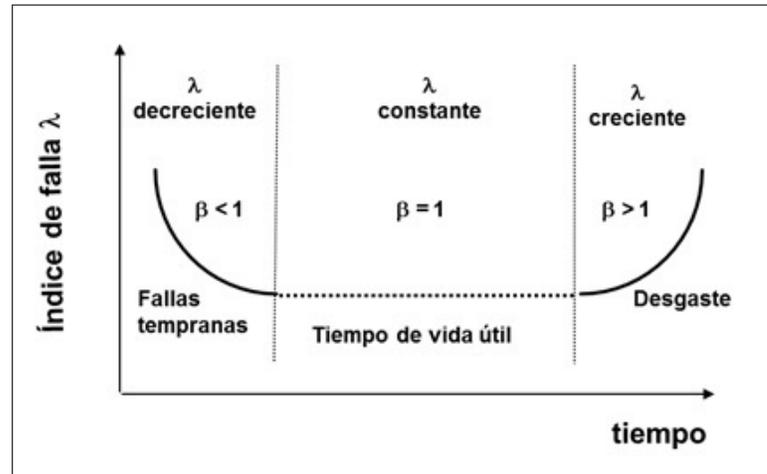


Figura 4.7: Curva de la Bañera.

La primera parte está representada por una distribución Weibull de parámetro de forma $\beta < 1$, la sección media de está representada por una distribución Weibull de parámetro $\beta = 1$ y la tercera sección se representa mediante una distribución Weibull de parámetro de forma $\beta > 1$.

4.2.4. Distribución Weibull Multivariada

La extensión de la distribución Weibull univariada al caso multivariado es crucial en vista del papel tan importante que juega en la teoría de confiabilidad para la construcción de modelos con varias fallas o la distribución de los tiempos de vida.

La función de densidad de la distribución Weibull multivariada $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede obtener mediante la diferenciación de la función de confiabilidad con

respecto a cada variable.

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^n \frac{\partial^n R(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (4.30)$$

Usando la derivación, la función de densidad es:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n \exp \left\{ - \left[\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} + \dots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{\alpha}} \right]^\alpha \right\}$$

$$\left[\left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\right) + \dots + \left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right) \right] \left[\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}-1} \left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}-1} \dots \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{\alpha}-1} \right] \quad (4.31)$$

$$\sum_{i=1}^{P(n)} \left\{ (-1)^{k_i} P_s(n, i) \left(\prod_{j=1}^{k_i} \alpha^{n_j} \right) \left[\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} + \dots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{\alpha}} \right]^{k_i, \alpha-n} \right\}$$

donde k_i es el número de sumados de la i -ésima partición de n tal que $n_1 + n_2 + \dots + n_{k_i} = n, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k_i} > 0, 1 \leq k_i \leq n; \alpha^{n_j}$ es igual a $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n_j+1)$, el factorial descendente para α (Knuth, 1992); $P(n)$ es el número total del conjunto de particiones de n ; $P_s(n, i)$ es el número total del conjunto de particiones del conjunto $S_n = 1, 2, \dots, n$ correspondiente a la i -ésima partición de n . Esta es la función Weibull multivariada de Marshall y Olkin (1967).

4.2.5. Distribución Log-Normal

La distribución Log-normal y normal están relacionadas a través de la función logaritmo. Si t es una variable aleatoria con distribución Log-normal, entonces $y = \ln(t)$ es una variable aleatoria con una distribución Normal. La función

de densidad de la distribución Log-normal es:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad t > 0 \quad (4.32)$$

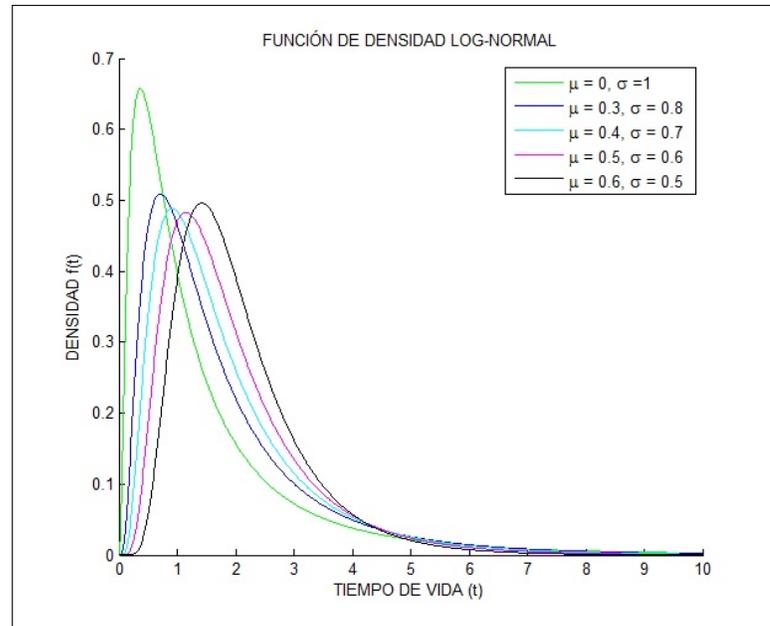


Figura 4.8: Función de Densidad Log-Normal.

Los parámetros de la distribución Log-normal son μ , que es un parámetro de localización y σ que es un parámetro de escala (algunas veces se le nombra parámetro de forma). El parámetro de localización puede estimarse con la siguiente expresión (4.33):

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \quad (4.33)$$

Donde n es el tamaño de la muestra. El parámetro de escala es estimado mediante la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n \ln(t_i^2) - (\sum_{i=1}^n \ln(t_i))^2}{n(n-1)}} \quad (4.34)$$

La media de la función de distribución Log-Normal esta dada por:

$$E(t) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} = Q_{50} e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad (4.35)$$

La varianza de la función de la distribución Log-Normal se representa:

$$V(t) = e^{(2\mu + 2\sigma^2)} = Q_{50}^2 e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (4.36)$$

Donde Q_{50} representa la mediana de la distribución. La función de confiabilidad Log-Normal esta dada por:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right), \quad t > 0 \quad (4.37)$$

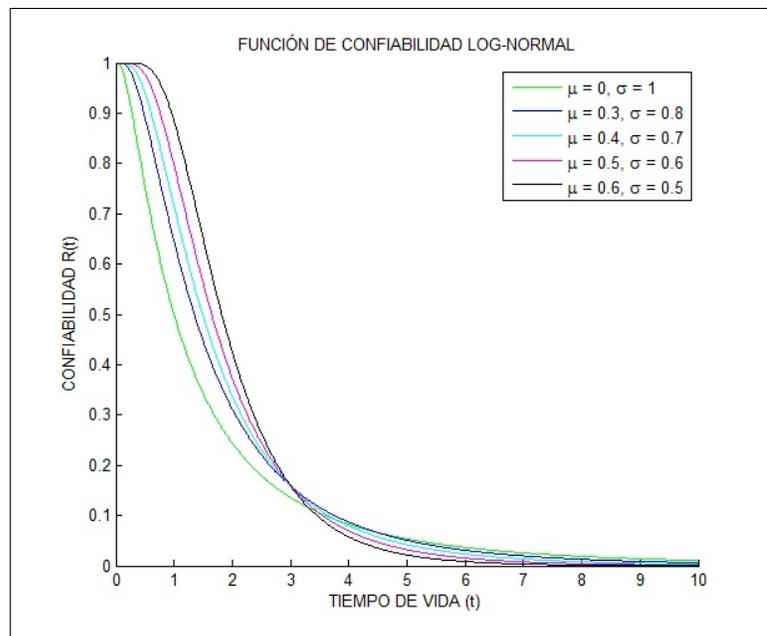


Figura 4.9: Función de Confiabilidad Log-Normal.

La función de tasa de fallas para la distribución Log-Normal es:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)}{t\sigma\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)\right]}, \quad t > 0 \quad (4.38)$$

La función de tasas de falla es creciente al inicio, después decrece y se aproxima a cero. Para valores grandes de σ ($\sigma > 1.5$), la función de tasa de fallas decrece rápidamente.

4.2.6. Distribución Log-Normal Multivariada

Sea $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ un vector aleatorio que tiene una distribución normal multivariada con media μ y matriz de covarianzas $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Entonces a través de la transformación $Y_i = \exp(X_i)$ y se define $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$. Por lo tanto, la densidad de Y es log-normal multivariada y su función de densidad es:

$$f(Y|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2}} \frac{1}{[y_1, y_2, \dots, y_n]} \exp\left[-(\ln y - \mu)' \Sigma^{-1} (\ln y - \mu) / 2\right] \quad (4.39)$$

Donde

$$0 < y_i < \infty$$

$\ln y = [\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_n]$ es un vector de n componentes.

$$y_i = \exp(x_i)$$

4.2.7. Distribución Poisson

Los experimentos que dan valores numéricos de una variable aleatoria X , el número de resultados que ocurren durante un intervalo dado, se llaman experimentos de Poisson. El intervalo dado puede ser de cualquier longitud, como un minuto, un día, una semana, etc. Un experimento de Poisson se deriva del proceso de Poisson y

posee las siguientes propiedades:

- El número de intervalos que ocurren en un intervalo específico es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio disjunto. Por lo tanto, el proceso Poisson no tiene memoria.
- La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo.
- La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo corto es insignificante.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X , que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo dado se denota por

$$P(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (4.40)$$

x : Es el número de ocurrencias del evento.

λ : Es el parámetro de la distribución Poisson, el cual representa el número de veces que se espera que ocurra el evento durante un intervalo específico.

Considerando diferentes valores del parámetro λ , la función de densidad Poisson toma distintas formas, como se muestra en la siguiente figura (Walpole, 1999).

La media y varianza de la distribución Poisson $P(x|\lambda)$ tiene el valor λ .

Sea $\mu = \lambda$, entonces podemos escribir:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-1}}{(x-1)!} \quad (4.41)$$

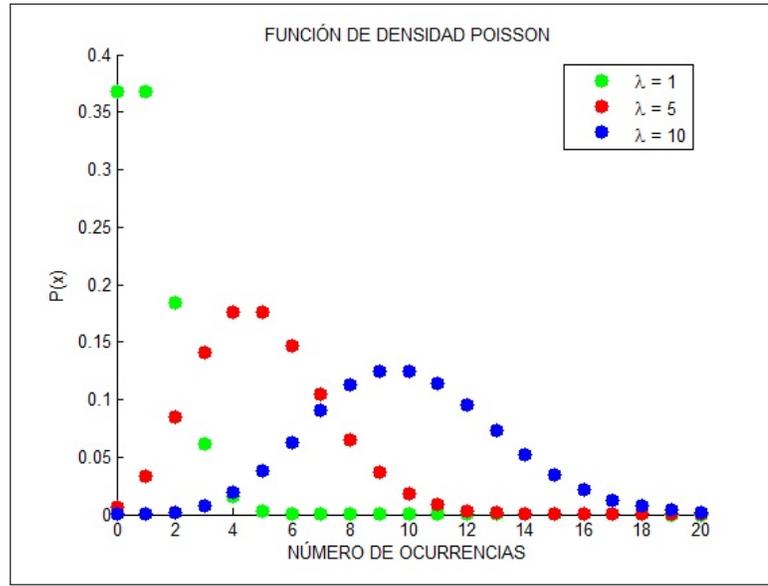


Figura 4.10: Función de Densidad Poisson.

ahora bien, sea $y = x - 1$ se obtiene:

$$E(X) = \mu \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu \quad (4.42)$$

$$E(X) = \lambda \quad (4.43)$$

Debido a que

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} P(y|\mu) = 1$$

La varianza de la distribución Poisson se obtiene al encontrar primero:

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-2}}{(x-2)!} \quad (4.44)$$

sea $y = x - 2$, se obtiene

$$E[X(X-1)] = \mu^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu^2 \quad (4.45)$$

entonces

$$\sigma^2 = E[X(X-1)] + \mu - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu = \lambda \quad (4.46)$$

Intervalos Poisson

Método Basado en la máxima verosimilitud

Se sabe que si $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud para θ , bajo ciertas condiciones suaves (Serfling, 1980), entonces $\hat{\theta} \sim N(\theta, I^{-1}(\theta))$, con $I(\theta)$ siendo la matriz de información. Para el caso Poisson

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \right) \quad (4.47)$$

Este método produce el mismo resultado que el basado en el teorema del límite central, ya que $\hat{\lambda} = \bar{x}$

4.2.8. Función de probabilidad conjunta

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria bidimensional continua puede describirse mediante su función de densidad de probabilidad conjunta.

Se dice que una variable aleatoria bidimensional $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ es continua si su función de distribución es absolutamente continua, es decir, si existe una función $f_X(x_1, x_2)$ no negativa tal que la función de distribución de \mathbf{X} puede ponerse en la forma

$$F_X(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.48)$$

A la función $f_X(x_1, x_2)$ que aparece en la definición de variable aleatoria bidimensional continua se le llama función de densidad y $F_X(x_1, x_2)$ se le denomina función de probabilidad acumulada de $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$.

Propiedades de la función de densidad conjunta son:

1. $f_X(x_1, x_2) \geq 0$ para cualquiera de los números reales x_1, x_2
2. La integral de la función de densidad conjunta sobre todos los valores posibles de las dos variables unidimensionales es 1, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (4.49)$$

3. La función de densidad conjunta puede obtenerse derivando la función de probabilidad acumulada conjunta

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.50)$$

Distribución marginal

El hecho de que estemos interesados en describir simultáneamente la variabilidad de dos variables aleatorias no es obstáculo para que también nos pueda interesar describir de forma separada la variabilidad de cada una de las variables aleatorias unidimensionales que forman el vector aleatorio.

En el caso continuo, las funciones de densidad marginales pueden obtenerse a partir de la función de densidad conjunta mediante lo siguiente

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_2 \quad (4.51)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 \quad (4.52)$$

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes entonces

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad (4.53)$$

La independencia puede ser interpretada de la siguiente forma, conociendo que $X_2 = x_2$ la evaluación de probabilidad en la variable X_1 no cambia. La estructura de independencia implica que el producto de las funciones de distribución F_{X_1} y F_{X_2} son igual a la función de distribución conjunta F

$$F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \quad (4.54)$$

4.3. Estimación de Parámetros

Una vez que se determina la función de probabilidad que mejor representa el comportamiento de los datos, se procede a estimar los parámetros de la distribución basados en la muestra aleatoria. Algunos métodos utilizados para determinar los parámetros de la distribución son:

- Mínimos Cuadrados.
- Máxima Verosimilitud.

De los dos métodos anteriormente mencionados, el mas utilizado en confiabilidad es el método de máxima verosimilitud debido a la existencia de censura en la muestra y sus propiedades asintóticas con respecto a la distribución Normal. En general, algunas propiedades de los estimadores de Máxima Verosimilitud:

- Son consistentes.
- Son invariantes frente a transformaciones uno a uno, es decir, si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil de θ y $g(\bar{\theta})$ es una función uno a uno de $\bar{\theta}$, entonces $g(\hat{\theta})$ es el estimador máximo verosímil de $g(\theta)$.
- Son asintóticamente normales.

- Son asintóticamente eficientes, es decir, entre todos los estimadores consistentes de un parámetro θ , los de máxima verosimilitud son los de varianza mínima.

4.3.1. Método de Máxima Verosimilitud

Suponga que Y_1, \dots, y_n con n variables aleatorias independientes, con funciones de densidad $f_i(y_i; \theta)$ dependientes del vector de parámetros θ . La función conjunta de las n observaciones independientes $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ es (Rodríguez, 2001):

$$f(y, \theta) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i; \theta) = L(\theta; y) \quad (4.55)$$

Esta función vista como una función de parámetros desconocidos θ , dados los datos y , es llamada la función de verosimilitud. Generalmente, se trabaja con el logaritmo natural (denotado por \log) de la función de verosimilitud a lo cual se le llama función de log-verosimilitud.

$$\log L(\theta; y) = \sum_{i=1}^n \log f_i(y_i; \theta) \quad (4.56)$$

Una vez estructurada la función $\log L(\theta; y)$ puede ser usada para la estimación del vector θ de parámetros.

Una forma de estimar el vector de parámetros θ dados los datos y , es maximizando la función de verosimilitud (o de forma equivalente la función de log-verosimilitud), escogiendo el vector de parámetros que hacen los datos observados lo más verosímiles posible.

Formalmente se define el estimador de máxima verosimilitud (MLE), como el valor $\hat{\theta}$:

$$\log L(\hat{\theta}; y) \geq \log L(\theta; y) \quad \text{para todo } \theta \quad (4.57)$$

La primera derivada de la función de log-verosimilitud es llamada función de calificación de Fisher (Fisher's score function), y se denota por:

$$u(\theta) = \frac{\partial \log L(\theta; y)}{\partial \theta} \quad (4.58)$$

Si la función de log-verosimilitud es cóncava se puede encontrar el estimador de máxima verosimilitud igualando la segunda derivada a cero $u(\hat{\theta}) = 0$. La función de calificación es un vector aleatorio con algunas propiedades estadísticas interesantes. En particular, la función evaluada en los valores verdaderos de θ , tiene media cero $E[u(\theta)] = 0$ con matriz de varianzas y co-varianzas dada por la *matriz de información*:

$$\text{var}[u(\theta)] = E[u(\theta)u'(\theta)] = I(\theta) \quad (4.59)$$

Bajo condiciones regulares, la matriz de información puede ser obtenida como menos el valor esperado de las segundas derivadas de la función de log-verosimilitud (Pham, 2006):

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \quad (4.60)$$

La matriz observada de las segundas derivadas negativas, es llamada la matriz de información observada.

Por otro lado, bajo ciertas condiciones de regularidad, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para muestras grandes, sigue aproximadamente una distribución Normal con media igual al parámetro verdadero y matriz de varianzas y co-varianzas dada por el inverso de la matriz de información, esto es:

$$\hat{\theta} \sim N_p(\theta, I^{-1}(\theta)) \quad (4.61)$$

Las condiciones de regularidad incluyen lo siguiente: el valor del parámetro

verdadero θ debe estar contenido en el espacio de parámetros, la función de log-verosimilitud deberá ser tres veces diferenciable y las terceras derivadas deben ser limitadas.

Estos resultados proveen las bases para construir pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Por ejemplo, bajo la hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ para algún valor fijo de θ_0 , la forma cuadrática es:

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)^T \text{var}^{-1}(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta_0) \quad (4.62)$$

para muestras grandes sigue aproximadamente una distribución χ^2 con p grados de libertad. Estos resultados pueden ser extendidos para cualquier combinación lineal de θ , incluyendo sub-conjuntos de elementos de θ .

Cuando el subconjunto contiene solo un elemento usualmente se toma la raíz cuadrada del estadístico de Wald, como un estadístico z , (Hauck, 1977).

$$z = \frac{\hat{\theta}_j}{\sqrt{\text{var}(\hat{\theta}_j)}} \quad (4.63)$$

Estos resultados pueden ser modificados sustituyendo la matriz de varianzas y covarianzas del estimador de máxima verosimilitud con el inverso de la matriz de información observada:

$$\hat{\text{var}}(\hat{\theta}) = I^{-1}(\hat{\theta}) \quad (4.64)$$

4.3.2. Máxima Verosimilitud con Ajuste para Muestras Pequeñas (MLE-RBA)

Factor RBA para la Distribución Weibull

La investigación de Paul Barringer muestra que el factor empírico de ajuste para muestras pequeñas (RBA) para el parámetro β de la distribución Weibull es C_4 elevado a la potencia 3.520. Se multiplica la $\hat{\beta}$ estimada mediante máxima verosimilitud (MLE) por el factor $C_4^{3.520}$, para ayudar a eliminar el seso del parámetro.

$$\beta_{insesgada} = \hat{\beta} (RBA_{factor-\beta}) = \hat{\beta} (C_4^{3.520}) \quad (4.65)$$

$$\eta_{insesgada} = \hat{\eta} (RBA_{factor-\eta}) = \hat{\eta} (C_4^{-0.217}) \quad (4.66)$$

4.4. Pruebas de Bondad de Ajuste

En el marco formal de las pruebas de hipótesis, la hipótesis nula H_0 se refiere a que una variable aleatoria x dada, la cual sigue una distribución de probabilidad $F(x)$ (por ejemplo la distribución Weibull); la variable aleatoria puede provenir de un proceso que esté sujeto a investigación. La prueba de bondad de ajuste aplicada a la prueba H_0 está basada en la medida de discrepancia de la muestra de datos con respecto a la distribución de prueba. Las pruebas de bondad de ajuste generalmente determinan pruebas estadísticas formales y las medidas de consistencia de los estadísticos de prueba.

La hipótesis nula H_0 , puede ser una hipótesis simple, si $F(x)$ está completamente especificada, por ejemplo, la distribución Log-Normal con $\mu = 100$ y $\sigma = 10$; H_0 puede ser una especificación incompleta cuando asegura que $F(x)$ es una distribución

Normal con parámetros μ y σ .

La prueba de bondad de ajuste compara la distribución de frecuencias observadas o empírica F_n , con una distribución específica. El procedimiento implica el cálculo de una distribución esperada F_0 de la muestra estudiada. El propósito de la prueba es averiguar si existen diferencias estadísticamente significativas entre la distribución observada F_n y la distribución esperada F_0 (D' Agostino y Stephens, 1986).

Existen algunos procedimientos para realizar pruebas de bondad de ajuste, entre las más conocidas destacan la prueba basada en la distribución Chi-cuadrada (χ^2), la prueba de Kolgomorov-Smirnov (K-S) y la prueba Anderson-Darling (A_n^2 o AD).

La prueba Chi-cuadrada (χ^2) es de valor limitado cuando se trabaja con la distribución Weibull, además la prueba no puede ser aplicada cuando se tienen tamaños de muestra $n < 25$. La potencia de esta prueba es igual a la de la prueba Kolgomorov-Smirnov (K-S), y menor que la prueba Anderson-Darling (A_n^2 o AD) (Dodson, 1994).

Dado lo anterior, la prueba Anderson-Darling (A_n^2), es más potente y por lo tanto es más recomendable. Estas pruebas tienen una relación estrecha.

■ Prueba Kolmogorov-Smirnov

La prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov es una alternativa para probar que una muestra proviene de una distribución continua. Esta prueba se basa en la comparación entre la función de distribución acumulada de una distribución teórica $F_t(x)$ con la función de distribución acumulada de la muestra $F_m(x)$.

Si las funciones de distribución acumulada teórica y muestral no son significativamente diferentes, entonces decimos que la muestra proviene de la distribución cuya función de distribución acumulada es $F_t(x)$. Sin embargo, si las diferencias entre las funciones de distribución acumulada son muy grandes como para que no se deban solamente al azar, se rechaza H_0 (Marques, 2001).

Los pasos a seguir en la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov son:

1. Plantear la hipótesis

$$H_0 : F_m(x) = F_t(x) \quad \forall \quad x \in R$$

$$H_a : F_m(x) \neq F_t(x), \text{ por lo menos para una } x$$

2. Calcular todos los valores $F_m(x)$ de la muestra x_1, x_2, \dots, x_n
3. Determinar la desviación máxima, que está dada por el supremo de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de la función acumulada teórica y de la muestra

$$D = \sup_{1 \leq i \leq n} |F_m(x_i) - F_t(x_i)| \quad (4.67)$$

con x_i , i -ésimo valor observado en la muestra

4. Elegir un nivel de significación $\alpha = 0.05$ o 0.01 ó ...
5. No se rechaza H_0 si el valor calculado D es menor o igual que el valor de la tabla D_α
 - Si $D \leq D_\alpha$: se acepta H_0
 - Si $D > D_\alpha$: se rechaza H_0

Las observaciones siguen la distribución $F_t(x)$

D_α depende del tipo de distribución a probar

■ Prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada

La prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada se refiere a la concordancia que existe entre las distribuciones acumuladas observadas; se contrasta la hipótesis de si la muestras provienen de distribuciones continuas, y es sensible a las diferencias de la población en lo que se refiere a la localización, dispersión, o disimetría.

Cuando la dimensión p es mayor que uno, la función de distribución empírica tiene un número infinito de puntos. Se desarrolló un procedimiento para determinar el estadístico Kolmogorov-Smirnov para el caso multivariado. Se supone que $u_1 = (x_1, y_1), \dots, u_n = (x_n, y_n)$ es una muestra aleatoria de dos distribuciones. Bajo este contexto, el par (x_i, y_j) es llamado punto de intersección si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$. Para $u = (x, y)$ se define la distancia superior $D_n^+(u) = (G_n(u) - G(u))$ y la distancia inferior $D_n^-(u) = (G(u) - G_n(u))$, donde G es la función de distribución y G_n es la función de distribución empírica. El estadístico Kolmogorov-Smirnov es:

$$D_n = \max_{u,v} \{G_n(u) - G(u), G(v) - G_n(v)\} \quad (4.68)$$

Este estadístico se puede expresar como $D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\}$

La prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada se basa en la diferencia máxima entre los valores de las distribuciones acumuladas observadas. En principio, es similar a la prueba univariada, y los valores críticos necesarios se pueden obtener de las tablas especiales (por ejemplo, las de D.B. Owen). Depende del tipo de distribución a probar.

■ Prueba Anderson-Darling

La prueba Anderson-Darling es una modificación de la prueba Kolmogorov-Smirnov (K-S). La principal diferencia radica en que la prueba K-S es de distribución libre en el sentido que los valores críticos no dependen de la distribución específica que es probada (Stephens, 1974). Por otro lado, la prueba de Anderson-Darling hace uso de una distribución específica para calcular valores críticos. Esto tiene la ventaja de permitir una prueba más sensible y la desventaja de que los valores críticos se deben calcular para cada distribución

(Dodson, 1994). Dado que en el caso de estudio de esta investigación, se utilizará el estadístico para datos de tiempo de vida, los cuales son tiempos de falla completos, se incluye la estimación del estadístico, definida como sigue.

- Estimación del estadístico A_n^2 para tiempos de falla completos

Sean x_1, x_2, \dots, x_n observaciones independientes de la variable aleatoria X , con función de distribución continua $G(x)$. Si se desea probar la hipótesis $H_0 : G(x) = G_0(x)$, donde $G_0(x)$ es una función de distribución completamente especificada, entonces la hipótesis nula es equivalente a probar que las observaciones t_1, t_2, \dots, t_n , donde $t_i = G_0(x_i)$, proviene de una distribución uniforme $(0,1)$. Si se denota con $F(t)$ la función de distribución de $T = G_0(X)$, y $F_n(t)$ la función de distribución de la muestra (es decir, la proporción de las observaciones menores que t), entonces el estadístico Anderson-Darling se define como: (D' Agostino y Stephens, 1986)

$$A_n^2 = n \int_0^1 [F_n(t) - t]^2 [t(1-t)]^{-1} dt \quad (4.69)$$

(4.69) determina si los datos ordenados de menor a mayor $\{x_1 < \dots < x_n\}$ provienen de una distribución con función acumulada continua $G(x)$.

$$A_n^2 = -n - S \quad (4.70)$$

Donde:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln F(x_i) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))] \quad (4.71)$$

El estadístico (4.70) se puede entonces comparar contra las distribuciones del estadístico de prueba para aceptar o rechazar la hipótesis $H_0 : F_n(t) = F_0$.

4.5. Teoría de Cópulas

Las cópulas bidimensionales son funciones bivariadas que juntan o bien “acoplan” dos funciones de distribución univariadas para construir funciones de distribución bivariadas continuas. La cópula representa una forma paramétrica conveniente para modelar la estructura de dependencia en distribuciones conjuntas de variables aleatorias (Escarela y Hernández, 2009).

4.5.1. Definición de Cópula

Una cópula bidimensional es una función de distribución bivariada de un vector aleatorio $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ cuyas marginales V_1 y V_2 son uniformes en el intervalo $\mathbf{I} = (0, 1)$. Es decir, una cópula es una función $C : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ que satisface las siguientes condiciones:

- 1) Condición de acotamiento.

$$\lim_{v_j \rightarrow 1^-} C(v_1, v_2) = v_{3-j} \quad (4.72)$$

$$\lim_{v_j \rightarrow 0} C(v_1, v_2) = 0 \quad (4.73)$$

Donde.

$$j = 1, 2$$

$$(v_1, v_2)^T \in \mathbf{I}^2$$

- 2) Condición de incremento.

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (4.74)$$

Para toda $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$

La importancia de las cópulas se describe en el siguiente teorema.

Teorema (Teorema Sklar). Sean Y_1, Y_2 variables aleatorias con función de distribución conjunta F , con marginales F_1 y F_2 respectivamente. Entonces existe una cópula C tal que satisface:

$$F(y_1, y_2) = [F_1(y_1), F_2(y_2)] \quad (4.75)$$

para toda $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Si F_1 y F_2 son continuas, entonces C es única; de otra forma C está determinada en forma única sobre el rango $F_1 \times \text{rango}F_2$. Inversamente si C es una cópula y F_1, F_2 son funciones de distribución, entonces F definida en la ecuación (4.75) es una función de distribución conjunta con marginales F_1 y F_2 (Escarela y Hernández, 2009).

Cópulas Arquimedianas

Las cópulas proveen una estructura general para modelar distribuciones bivariadas. Una cópula es llamada arquimediana si esta puede ser expresada en la forma:

$$C_\alpha(u, v) = \phi_\alpha^{-1}[\phi_\alpha(u) + \phi_\alpha(v)] \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (4.76)$$

Donde ϕ_α es convexa y decreciente tal que $\phi_\alpha \geq 0$, $\phi_\alpha(1) = 0$. A la función ϕ_α se le denomina generador de cópula C_α y la inversa del generador ϕ_α^{-1} es la transformada de Laplace de una variable, la cual introduce la dependencia α .

Familia Clayton

La función de confiabilidad bivariada perteneciente a la familia Clayton tiene la forma:

$$C_\alpha(u, v) = [u^{1-\alpha} + v^{1-\alpha} - 1]^{1/1-\alpha} \quad \alpha > 1 \quad (4.77)$$

Aquí $\phi_\alpha^{-1}(s) = (1+s)^{1/(1-\alpha)}$ es la transformada de Laplace de una distribución gamma. T_1 y T_2 están positivamente asociados cuando $\alpha > 1$. La función de confiabilidad bivariada pertenece a la familia Clayton, si y solo si, la función de riesgo λ muestra que $\frac{\lambda(t_2|T_1=t_1)}{\lambda(t_2|T_1 \geq t_1)} = \alpha$

Familia Gumbel

La función de confiabilidad bivariada perteneciente a la familia Gumbel tiene la forma.

$$C_\alpha(u, v) = e^{\langle -[(-\ln(u))^{1/\alpha} + (-\ln(v))^{1/\alpha}]^\alpha \rangle} \quad (4.78)$$

Donde $0 < \alpha < 1$. Aquí $\phi_\alpha^{-1}(s) = e^{(-s^\alpha)}$ es la transformada de Laplace de una distribución estable positiva. Valores pequeños de α producen alta correlación (Gumbel, 1960).

4.6. Coeficiente de Correlación Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson, es un índice que mide el grado de covarianza entre distintas variables, esto significa que puede haber variables fuertemente relacionadas. El coeficiente de Pearson es de fácil ejecución e interpretación y, se simboliza con $\rho_{x,y}$, éste se determina mediante la siguiente expresión

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.79)$$

donde:

$\sigma_{x,y}$: es la covarianza de (X, Y)

σ_x : es la varianza de la variable x

σ_y : es la varianza de la variable y

El índice de correlación varía en el intervalo $[-1, 1]$

- Si $\rho = 1$, existe una correlación positiva perfecta.
- Si $0 < \rho < 1$, existe una correlación positiva.
- Si $\rho = 0$, no existe correlación entre las variables.
- Si $-1 < \rho < 0$, existe una correlación negativa.
- Si $\rho = -1$, existe una correlación negativa perfecta.

4.7. Coeficiente de Correlación Kendall

El coeficiente de correlación entre dos variables i y j puede ser representado en la siguiente expresión τ Kendall:

$$\tau_{i,j} = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{i,j} \, d_i d_j \quad (4.80)$$

$$\tau = (\tau_{i,j}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Donde:

$$C_{i,j} = C(1, \dots, 1, F_i(t), 1, \dots, 1, F_j(t), 1, \dots, 1) \quad (4.81)$$

Propiedades.

Si la τ Kendall es igual a cero eso significa que no existe correlación entre las variables.

Si la τ Kendall es mayor de cero significa que existe una correlación positiva entre las variables.

Si la τ Kendall es menor de cero significa que existe una correlación negativa entre las variables.

4.8. Bootstrap

La técnica bootstrap proporciona estimaciones del error estadístico, imponiendo escasas restricciones sobre las variables aleatorias analizadas y se puede establecer como un procedimiento de carácter general, independientemente del estadístico considerado.

Sea $\beta(f)$ un parámetro dependiente de una función de distribución desconocida f y, por otro lado, considerando las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n , tales que:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim f$$

Las variables aleatorias son idéntica e independientemente distribuidas. Por otra parte, se representa el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una muestra correspondiente a extracciones aleatorias sobre la muestra original. Los valores correspondientes a la nueva muestra de observaciones nos permiten obtener la distribución empírica \hat{F}_n , la cual ayuda a la construcción no paramétrica de máxima verosimilitud de la función de distribución F . Es posible, hacer referencia al teorema Glivenko-Cantelli, que establece una convergencia casi segura, cuando $n \rightarrow \infty$, entre las distribuciones F y \hat{F}_n , aunque debe notarse que es una convergencia asintótica.

$$\sup \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \rightarrow 0 \quad (4.82)$$

Por lo tanto, es factible establece $F = \hat{F}_n$, esto significa que la función de distribución de la variable aleatoria de interés se estima a partir de la distribución empírica, construyendo el aspecto fundamental del Bootstrap (Efron, 1979).

4.9. Función de Costo para el Tiempo de Reemplazo

Un componente es reemplazado cuando alcanza un tiempo T , o en el caso de que el componente llegue a fallar. CRF es el costo de reparar la falla y CRP es el costo del reemplazo preventivo, donde $CRP < CRF$. Cada reemplazo renueva completamente al sistema y se toma el tiempo de reemplazo del componente.

τ representa el tiempo de vida del componente. Si suponemos que $Z = \min(\tau, T)$. Obviamente, el primer reemplazo será después de un tiempo aleatorio Z . Por lo tanto, el tiempo esperado entre los reemplazos es:

$$E[Z] = \int_0^T (1 - F(x)) dx \quad (4.83)$$

$F(t)$ es la función de distribución acumulada del tiempo de vida del componente.

Si el costo de reemplazo para un período de tiempo es igual a $F(t)CRF + (1 - F(t))CRP$.

Por lo tanto, la función de costo por unidad de tiempo es (Gertsbakh, 2000):

$$\eta(t) = \frac{F(t)CRF + (1 - F(t))CRP}{\int_0^t (1 - F(x)) dx} \quad (4.84)$$

Capítulo 5

Metodología

Considerando el problema planteado en el capítulo 2 y la revisión de literatura referente a los modelos que consideran la dependencia, este capítulo se enfoca en la metodología propuesta para incorporar los modelos que trabajan con la dependencia entre los modos de falla en la metodología RCM.

5.1. Mantenimiento

Se define al mantenimiento como el conjunto de acciones orientadas a conservar o restablecer un sistema y/o equipo a su estado normal de operación para cumplir un servicio determinado, en condiciones económicamente favorables y de acuerdo a las normas de seguridad integral (Moubray, 1997).

5.2. Mantenimiento Centrado en Confiabilidad

Mantenimiento Centrado en Confiabilidad (por sus siglas en inglés RCM), se define como un proceso usado para determinar, qué debe hacerse para asegurar que

cualquier activo físico continúe haciendo lo que sus usuarios quieren que haga en su contexto actual de funcionamiento (Moubray, 1997).

El mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM) no solo es una estrategia específica de mantenimiento, sino un proceso de toma de decisiones para administrar las actividades de mantenimiento, con base en las características de los componentes del sistema.

5.2.1. Metodología del Mantenimiento Centrado en Confiabilidad

1. Selección del Equipo.

Se generan listas de todos los subsistemas, equipos y elementos que componen el sistema, es importante tener el recuento histórico de las fallas y mantenimiento de los equipos así como también los esquemas, diagramas funcionales, diagramas lógicos, entre otros, con el fin de identificar los equipos a los que se les aplica mantenimiento periódico. Para determinar la prioridad de los equipos se consideran los siguientes parámetros:

- Importancia del equipo en el proceso productivo.
- Costo del equipo en caso de daño por falla.
- Estado del equipo.
- Costo de mantenimiento.

2. Definir Funciones.

Se identifican y documentan todas las funciones, éstas se clasifican en:

- Funciones Primarias.

Describen las razón por la cual el equipo fue adquirido.

- Funciones Secundarias.

Están relacionadas con las características que tiene el equipo.

- Protección.
- Medio Ambiente.
- Apariencia.
- Control, contención, comodidad.
- Salud y Seguridad.
- Economía y Eficiencia.
- Integridad Estructural.

- Funciones Ocultas.

Es la función cuya falla pasará desapercibida en circunstancias normales.

3. Identificar Fallas.

Se identifican los tipos de falla en:

- Fallas funcionales.

El equipo es incapaz de realizar la función requerida o para la cual fue diseñado.

- Fallas potenciales.

Es la degeneración del rendimiento del equipo. Si la tendencia continúa, llevará a la falla funcional.

4. Definir modos de falla y causas raíces.

- Modo de falla.

Describe la forma en que las fallas pueden ocurrir.

- Causa raíz.

Es la razón básica de una falla o la de inicio del deterioro para una eventual falla.

5. Determinar la Confiabilidad.

En esta sección se elige el tipo de plan de mantenimiento entre los que destacan los siguientes:

- Mantenimiento Basado en Tiempo.
- Mantenimiento Basado en Condición.
- Rediseño.

Una vez que se selecciona el tipo de plan que se aplicará en el equipo. Se determina la probabilidad de falla a través de los modelos de confiabilidad adecuados.

6. Plan de Mantenimiento.

Se administran las actividades del plan de mantenimiento mediante la información generada después de determinar la confiabilidad.

5.3. Falla

Finalización de la capacidad de cualquier componente individual para realizar la función requerida, pero sin la finalización de la capacidad de un producto en su conjunto para funcionar.

5.4. Análisis Modo y Efecto de Falla (AMEF)

El análisis del modo y efecto de fallas potenciales, AMEF, es un proceso sistemático para la identificación de las fallas potenciales del equipo antes de que éstas ocurran, con el propósito de eliminarlas o de minimizar el riesgo asociado a las mismas. Por lo tanto, el AMEF puede ser considerado como un método analítico estandarizado para detectar y eliminar problemas de forma sistemática y total. La eliminación de los modos de fallas potenciales tiene beneficios, a corto plazo, representa ahorros de los costos de reparaciones, las pruebas repetitivas y el tiempo de paro. El beneficio a largo plazo es mucho más difícil de medir puesto que se relaciona con la satisfacción del cliente con el producto y con sus percepciones de la calidad.

5.4.1. Modo de Falla

Un modo de falla potencial se define como la manera en la cual un componente, subsistema o sistema, podrán potencialmente fallar en cumplir o entregar la función deseada. Se subdivide en cuatro:

- No funciona

Es totalmente inoperante.

- Función parcial

Cumple con algunas de las especificaciones pero no completamente con lo esperado.

- Función intermitente

Cumple pero se pierde algo de funcionalidad.

- Función no deseada

Afecta de manera adversa al sistema.

5.5. Metodología Propuesta

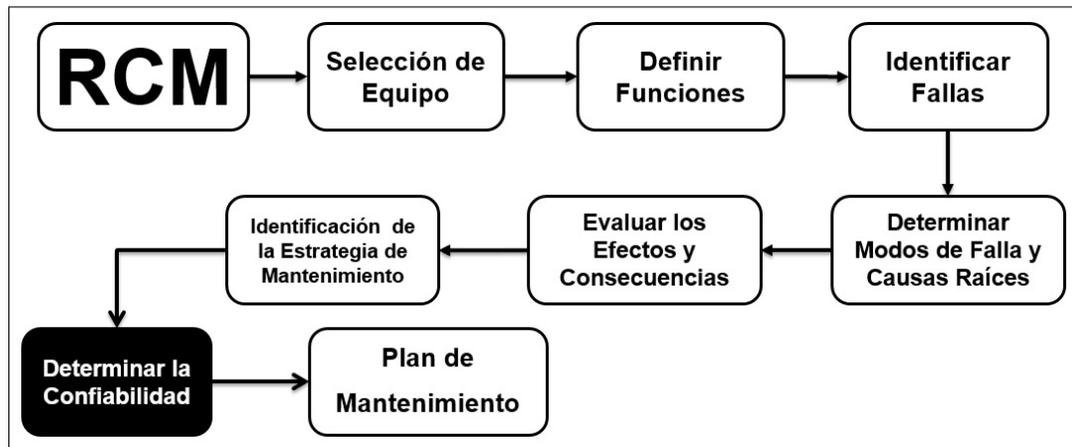


Figura 5.1: Metodología General RCM.

La figura 5.1 muestra los pasos de la metodología RCM. Con el objetivo de determinar la confiabilidad considerando la dependencia entre las fallas, se detalla la metodología propuesta (figura 5.2), con el supuesto de que la recolección de datos se realizó de manera adecuada.

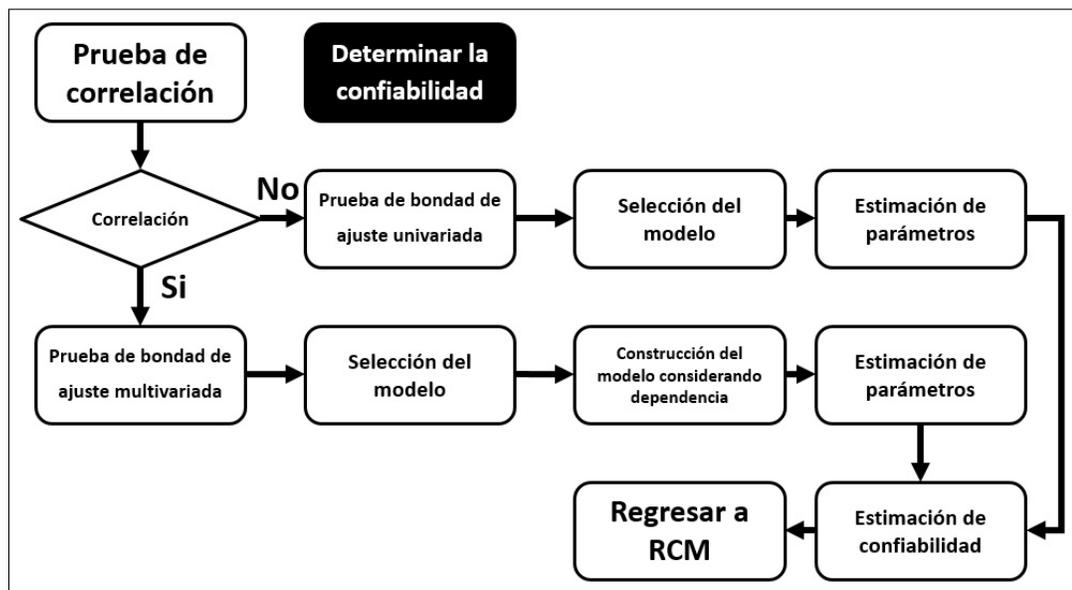


Figura 5.2: Metodología Propuesta.

5.5.1. Pasos Generales de la Metodología Propuesta

1) Prueba de correlación

Probar si los modos de falla están correlacionados, mediante la determinación del coeficiente de correlación τ de Kendall (ver sección 4.6 y 4.7 del capítulo IV). Con el fin, de determinar si existe dependencia entre las fallas. El coeficiente τ de Kendall debe ser diferente de 0, si el coeficiente es mayor que 0 existe una correlación positiva entre las variables. Si el coeficiente τ de Kendall es igual a 0, no hay correlación entre los modos de falla, seguir los pasos de la metodología ordinaria (ésta se describe al terminar esta sección).

2) Pruebas de bondad de ajuste

Realizar una prueba de bondad de ajuste univariada o multivariada según sea el caso, con el propósito de averiguar que tipo de distribución de probabilidad se ajusta a los tiempos de falla. Existen algunos procedimientos para realizar este tipo de pruebas (ver capítulo IV, sección 4.4).

3) Selección del modelo

Mediante los resultados obtenidos de las pruebas de bondad se elige el modelo de la distribución de los modos de falla, con un nivel de confianza del 95 %.

4) Construcción del modelo considerando dependencia

La cópula se construye en función de las distribuciones marginales de los modos de falla, entonces es una función que considera la dependencia entre los modos de falla.

5) Estimación de parámetros

La estimación de los parámetros es una parte fundamental ya que de éstos se derivan los componentes para el análisis posterior, lo cual se puede llevar a cabo

mediante métodos como: máxima verosimilitud, mínimos cuadrados, etc. (ver capítulo IV, Sección 4.3). En el caso de que la muestra de tiempos de falla sea pequeña se realiza la corrección de los parámetros (Ver capítulo IV, sección 4.3). Los intervalos de confianza para los parámetros del modelo que considera la dependencia entre las fallas, se estiman mediante el método Bootstrap.

6) **Estimación de confiabilidad**

La estimación de la confiabilidad, la tasa de falla y la probabilidad de falla, se realiza dependiendo del modelo utilizado, es decir, si el modelo es paramétrico simplemente se reemplazan los parámetros estimados en las funciones paramétricas de probabilidad y tasa de fallas correspondientes al modelo y se realiza la estimación.

7) **Plan de mantenimiento**

Se genera una base de datos de las estimaciones de confiabilidad. Con el fin de incorporar la probabilidad de falla en la metodología RCM y así poder realizar el plan de mantenimiento basado en las estimaciones de confiabilidad.

Metodología Ordinaria

2) **Pruebas de bondad de ajuste univariadas**

Realizar una prueba de bondad de ajuste univariada, con el propósito de averiguar que tipo de distribución de probabilidad se ajusta a los tiempos de falla. Existen algunos procedimientos para realizar este tipo de pruebas (ver capítulo IV, sección 4.4).

3) **Selección del modelo**

Mediante los resultados obtenidos de las pruebas de bondad de ajuste univariadas se elige el modelo que se ajusta a los modos de falla, con un nivel de

confianza del 95%. También se puede elegir por a la naturaleza del sistema (ver sección 4.1 y 4.2 del capítulo IV).

4) **Estimación de parámetros**

La estimación de los parámetros es una parte fundamental ya que de éstos se derivan los componentes para el análisis posterior, lo cual se puede llevar acabo mediante métodos como: máxima verosimilitud, mínimos cuadrados, etc. En el caso de que la muestra de tiempos de falla sea pequeña se realiza la corrección de los parámetros (ver capítulo IV, sección 4.3).

5) **Estimación de confiabilidad**

La estimación de la confiabilidad, la tasa de falla y la probabilidad de falla, se realiza dependiendo del modelo utilizado, es decir, simplemente se reemplazan los parámetros estimados en las funciones paramétricas de probabilidad y tasa de fallas correspondientes al modelo y se realiza la estimación.

6) **Plan de mantenimiento**

Se genera una base de datos de las estimaciones de confiabilidad. Con el fin de incorporar la probabilidad de falla en la metodología RCM y así poder realizar el plan de mantenimiento basado en las estimaciones de confiabilidad.

Capítulo 6

Aplicación y Validación

Este capítulo tiene como propósito mostrar el desarrollo de la metodología RCM, para exponer la debilidad de estimar la confiabilidad considerando independencia entre las fallas. Como caso de estudio, se realiza la simulación de un motor eléctrico de inducción y adicionalmente se muestra un caso real desarrollado en una máquina de inyección de plástico. Se desarrolla el RCM para administrar las actividades del plan de mantenimiento.

6.1. Aplicación de la Metodología Propuesta

Para este caso particular, se realizó la simulación del funcionamiento de un motor eléctrico jaula de ardilla bajo condiciones normales de operación.

La metodología propuesta esta enfocada en la estimación de la confiabilidad mediante el uso de modelos que consideren dependencia entre las fallas, para después incluir tal estimación en la administración de las actividades del plan de mantenimiento.

6.1.1. Caso 1: Motor Eléctrico de Inducción

Los motores eléctricos de inducción jaula de ardilla son los más utilizados en la industria, por lo tanto es importante que estén siempre en las mejores condiciones. Las empresas necesitan realizar actividades de mantenimiento de forma adecuada para asegurar que los motores eléctricos permanezcan trabajando.

A continuación se desarrollarán los pasos de la metodología RCM:

1. Selección del Equipo.

El motor esta compuesto por:

- Estátor.
- Rotor.
- Placa de bornes.
- Eje.
- Carcasa.
- Ventilador.

Es necesario que cada uno de los componentes realicen las actividades para las cuales fueron diseñados.

2. Definir las Funciones.

- Función Primaria.

Convertir la energía eléctrica en energía mecánica.

- Función Secundaria.
 - Cambio de sentido del giro.
 - Regulación de la velocidad de giro.

- Función Oculta.
 - Protección para asegurar la continuidad del funcionamiento.
 - Protección contra contactos directos e indirectos.
 - Protección contra sobrecargas y cortocircuitos.

3. Identificar las Fallas.

- Falla Total.

No se puede convertir la energía eléctrica en energía mecánica (paro total del motor).

- Falla Parcial.

Cambios en el comportamiento de la corriente.

4. Determinar los Modos de Falla.

- Modo de Falla 1.

Barras rotas:

Consecuencias.

Las barras rotas en el rotor, causa calor excesivo y cambios en la corriente. Esto puede propagarse a otras barras del rotor y destruir el aislante alrededor de las placas o laminaciones.

- Modo de Falla 2.

Aislamientos Estátor:

Consecuencias.

El aislante del estátor no puede aguantar el calor intenso desarrollado por las barras rotas del rotor, lo cual provoca un cortocircuito.

Si no funciona el estátor el rotor no puede girar, por lo tanto, el motor no funciona. De igual forma, *si el rotor falla*, el motor no funciona.

5. Tipo de Plan.

El RCM sugiere:

- Mantenimiento Basado en Condición (MBC).

Es el monitoreo de una condición técnica y económicamente viable para detectar y alertar una pérdida gradual de la función.

Algunas técnicas son:

- Análisis de vibración.
- Análisis de aceite.
- Análisis de corriente.

- Mantenimiento Basado en Tiempo (MBT).

Es una reparación técnica y económicamente viable para restaurar el funcionamiento del motor y reducir el riesgo de falla.

- El motor tiene un tiempo de vida identificable.
- La técnica restaurara el estado o rendimiento del motor.

- Re-diseño

Es técnicamente y económicamente viable sustituir el motor y eso reduce el riesgo de falla.

- Reducir la exposición de fallas relacionadas con la seguridad o el medio ambiente.
- Mayores costos de reparación.

6. Estimación de la Confiabilidad.

Se realizó una simulación de un motor eléctrico trifásico de inducción de corriente alterna de 200hp para obtener 20 tiempos de falla en horas, los cuales se muestran en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Tabla de Información de los Modos de Falla.

Fallas en el Rotor	Fallas en el Estátor
1241	1710
7284	180
483	2309
1712	1616
51	1057
2343	1785
3945	1536
5183	2374
1784	235
102	3912
1536	832
1507	7151
2634	3127
4095	3906
1688	2843
2538	64
603	839
6172	8521
1609	737
1132	686

- Prueba de Correlación

El coeficiente τ de Kendall es una medida de correlación, mediante la cual se puede conocer el tipo de correlación que existe entre las fallas. Para este caso de estudio es necesario conocer el coeficiente (ver ecuación 4.80).

$$\tau_{mf1,mf2} = 0.89 \quad (6.1)$$

El valor del coeficiente de correlación $\tau = 0.89$ y un valor de probabilidad

de 0.000 (Si el Valor P es menor que el nivel de confianza 95 %), muestra que existe una correlación positiva entre las fallas (ver sección 4.7 del capítulo IV).

- Prueba de Bondad de Ajuste

Usando los tiempos de falla de la tabla 6.1, se obtiene mediante una prueba de bondad de ajuste Anderson-Darling la distribución de los tiempos de falla, los resultados se muestran en las tablas 6.2 y 6.3.

Tabla 6.2: Resumen para los Tiempos de Falla en el Rotor.

Distribución	Weibull
Parámetros	Escala 2499
	Forma 1.156
AD	0.368
P-value	> 0.250

La tabla 6.2, muestra que los tiempos de falla del rotor, se distribuyen de forma Weibull con un valor de probabilidad mayor a 0.250. Con parámetro de forma igual a 1.156; y escala 2499.

Tabla 6.3: Resumen para los Tiempos de Falla en el Estátor.

Distribución	Weibull
Parámetros	Escala 2315
	Forma 1.480
AD	0.185
P-value	> 0.250

En la tabla 6.3, se observa que los tiempos de falla del estátor, se distribuyen de forma Weibull con un valor de probabilidad mayor a 0.250. Con parámetro de forma igual a 1.480; y escala 2315.

- Construcción del Modelo (considerando la dependencia)

Suponiendo que los modos de falla son **independientes** es necesario utilizar la ecuación (4.4) para estimar la confiabilidad

$$R_{ind}(t) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t}{2499} \right)^{1.156} + \left(\frac{t}{2315} \right)^{1.480} \right] \right\} \quad (6.2)$$

En la figura 6.1, se exhibe la gráfica de la función 6.2 suponiendo independencia entre las fallas.

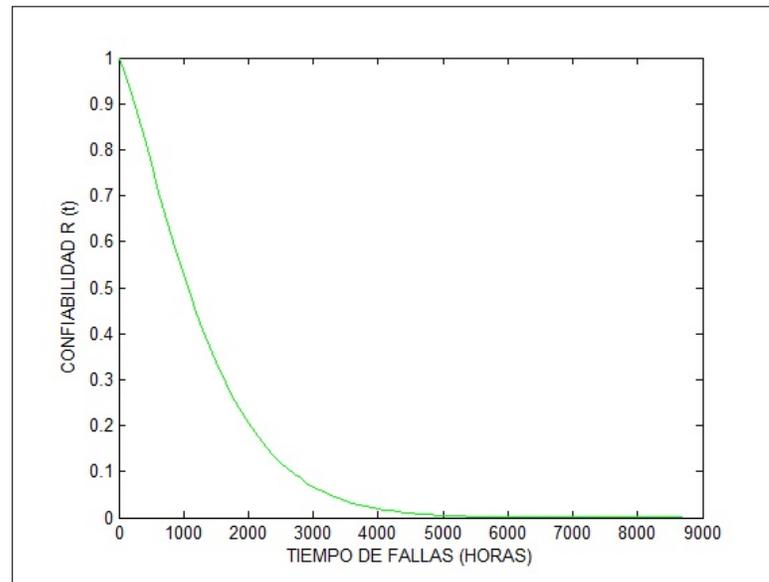


Figura 6.1: Función de Confiabilidad (**Independencia**).

Con base en el análisis anterior se establece que tendrán que pasar 400 horas; el intervalo de confianza para el tiempo de falla, con un nivel de confianza del 95 %, establece que tendrán que pasar al menos 373.8 y como máximo 426.2 horas, para que el motor eléctrico tenga una probabilidad de falla del 18 %, es decir el 82 % de confiabilidad. Con la estimación anterior se podrán administrar las actividades del plan de mantenimiento para el motor eléctrico.

Por los registros en la bitácora, se sabe que el motor recibe mantenimiento una vez al mes.

El tiempo de operación anual es de 8,760 horas.

El número de reparaciones anuales se estima con la siguiente función:

$$NRA = \frac{8,760}{400} \quad (6.3)$$

De acuerdo a lo anterior, el motor deberá ser reparado 22 veces al año, lo cual es en forma aproximada dos veces por mes. El costo de reparación es de 45,000. Por lo tanto, es posible estimar el costo anual de reparación.

$$CAM = (45,000)(22) \quad (6.4)$$

El costo anual de mantenimiento para el sistema es de 990,000.

Sin embargo, mediante el coeficiente de correlación τ es posible probar que el supuesto de independencia no se cumple para éste caso. Por lo tanto, es necesario utilizar la ecuación (4.78) para estimar la confiabilidad.

Usando los datos de tiempos de falla de la tabla 6.1, se estimó el parámetro α con el método de máxima verosimilitud, $\alpha = 5.34$. Entonces la función $R(t)$ es:

$$R(t) = exp \left\{ - \left[\left(\left(\frac{t}{2499} \right)^{1.156} \right)^{5.34} + \left(\left(\frac{t}{2315} \right)^{1.480} \right)^{5.34} \right]^{\frac{1}{5.34}} \right\} \quad (6.5)$$

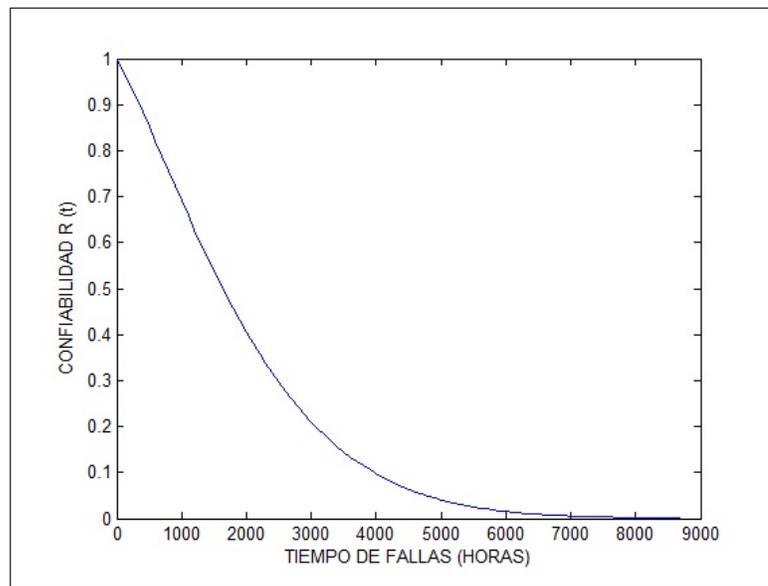


Figura 6.2: Función de Confiabilidad (**Dependencia**).

Con el análisis anterior se puede establecer que tendrán que pasar 600 horas; el intervalo de confianza para el tiempo de falla, con un nivel de confianza del 95 %, establece que tendrán que pasar al menos 577.7 y como máximo 622.3 horas, para que el motor eléctrico tenga una probabilidad de falla del 18 %, es decir 82 % de confiabilidad. Esta estimación deberá ser incluida en la metodología RCM para administrar las actividades del plan de mantenimiento.

El tiempo de operación anual es de 8,760 horas.

El número de reparaciones anuales se estima con la siguiente función:

$$NRA = \frac{8,760}{600} \quad (6.6)$$

Lo anterior indica que el motor deberá ser reparado 14 veces al año, eso es de forma aproximada una vez por mes. El costo de reparación es de 45,000. Con base en lo anterior es posible estimar el costo anual de

reparación.

$$CAM = (45,000)(12) \tag{6.7}$$

El costo anual de mantenimiento para el sistema es de 540,000

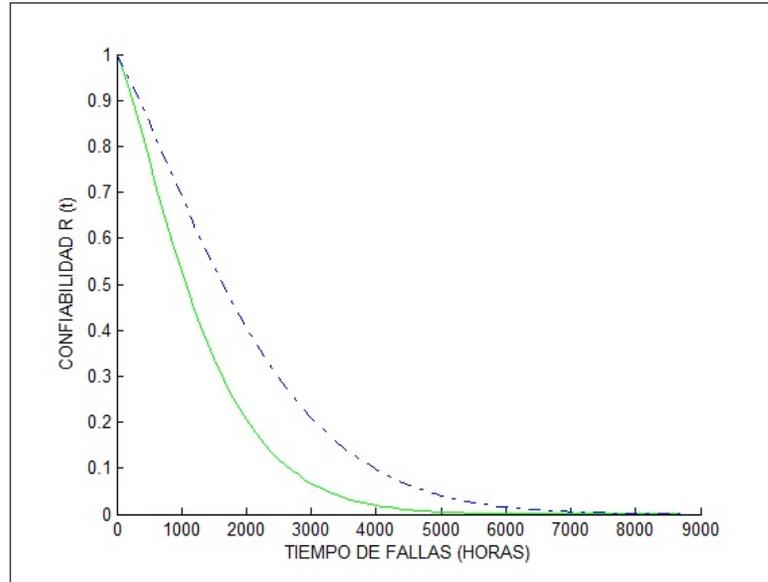


Figura 6.3: Comparación de Funciones de Confiabilidad.

En la figura 6.3, se muestra como era de esperarse, el modelo que considera dependencia entre las fallas es diferente al modelo tradicional, éste cambiará la administración de las actividades del plan de mantenimiento.

Tabla 6.4: Comparación de Modelos.

	Independencia	Dependencia
Tiempo (hrs)	400	600
Costo Anual (USD)	990,000	540,000

La tabla 6.4, muestra que el modelo que considera dependencia entre las fallas, genera ahorros para la empresa aproximadamente de un poco más del 45 % en costo anual de mantenimiento.

7. Desarrollar el Plan de Mantenimiento.

Debido a que el caso de estudio uno fue una simulación de un motor eléctrico. Desarrollar un plan de mantenimiento no será posible. El aporte de la metodología RCM, es incluir modelos que consideren la dependencia entre las fallas para estimar de manera adecuada la confiabilidad, obteniendo como resultado mejorar la frecuencia de las actividades del plan de mantenimiento para el motor eléctrico. Con el fin de mejorar las condiciones de trabajo, aumentar el desempeño operativo y reducir los costos de mantenimiento.

6.1.2. Caso 2: Máquina de Inyección (PYMCSA)

Una de las técnicas para la manufactura de piezas plásticas que más se utiliza en la industria es el moldeo por inyección, debido a que las casas, vehículos, oficinas, fábricas, etc., contienen algunos artículos manufacturados mediante éste proceso. Entre ellos se encuentran objetos como el cuerpo de un bolígrafo y formas complejas como el agitador para un lavadora.

El moldeo por inyección requiere temperatura y presión más elevada que cualquier otra técnica de transformación; el resultado es que los artículos manufacturados mediante éste proceso son objetos con bastante precisión, superficies limpias y lisas. Además utiliza de forma eficiente el material, a un ritmo de producción elevado.

El fundamento del moldeo por inyección es inyectar el polímero fundido en un molde cerrado y frío, donde se solidifica para formar el producto. La pieza moldeada se obtiene al abrir el molde para sacarla.

El mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM), es una metodología que tiene como fin mejorar la administración de las actividades del plan de mantenimiento del motor eléctrico.

A continuación se desarrollaran los pasos de la metodología RCM:

1. Selección del equipo

Determinar cual es la máquina que tiene el mayor número de fallas.

Las maquinas que manufacturan los productos para el principal cliente de la empresa son:

- Máquina 3
- Máquina 4
- Máquina 5
- Máquina 10

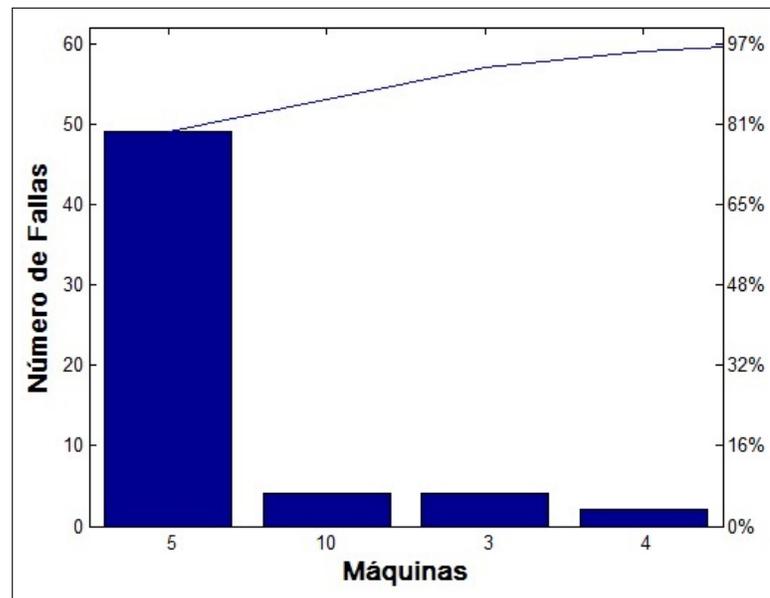


Figura 6.4: Gráfica de Pareto.

La máquina con mayor número de fallas de acuerdo a la figura 6.4 es la número 5.

La máquina de inyección de plástico es usada para fabricar diferentes tipos de productos sólidos mediante la inyección directa del plástico para formar el producto. Esta conformada por diferentes sistemas los cuales son administrados con el objetivo de crear productos de calidad, los sistemas son:

- Carga
- Control
- Eléctrico y electrónico
- Hidráulico
- Mecánico
- Refrigeración

Ahora, es necesario identificar cual de los sistemas tiene el mayor número de fallas, ya que en éste se enfocarán los esfuerzos por mejorar las actividades de

mantenimiento.

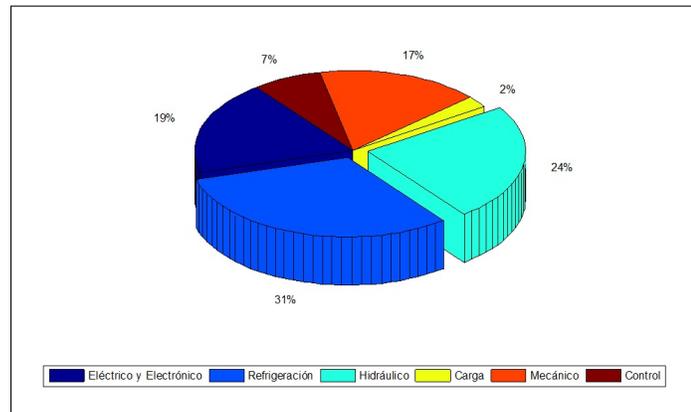


Figura 6.5: Gráfica de Pastel de Fallas en los Sistemas de la Máquina No 5.

Con base en la figura 6.5 los sistemas con mayor número de fallas son el sistema de refrigeración e hidráulico. Es posible afirmar que más del 50% de las fallas se deben a éstos.

El sistema de refrigeración se divide en dos, enfriamiento de la máquina y molde. Para fines de esta investigación solo se analizará el sistema de refrigeración de la máquina, debido a que es el sistema con mayor número de fallas, el cual esta conformado por el regulador de agua de enfriado, intercambiadores de calor, válvulas termostáticas y termopares. La válvula termostática se utiliza para regular la temperatura del aceite hidráulico del depósito y la temperatura del molde.

2. Definir funciones.

Es importante definir las funciones porque son las bases para el análisis de fallas, se relacionan con el contexto de funcionamiento y por lo tanto el esfuerzo de las actividades de mantenimiento.

Válvula termostática

- **Función Primaria.**
Regular el flujo de agua para refrigerar el aceite.
- **Función Secundaria.**
Control de la temperatura del aceite.
- **Función Oculta.**
Enviar información al sistema de control.

3. Identificar fallas.

Se debe poder distinguir entre las fallas parciales o totales porque comúnmente se tienen diferentes causas. Las fallas potenciales son aquellas que anticipan las fallas funcionales (totales).

Fallas en la función primaria.

Regular el flujo de agua para refrigerar el aceite.

- **Falla Total.**
Cierre completo del caudal.
- **Falla Parcial.**
Flujo insuficiente del Refrigerante.

Fallas en la función secundaria.

Control de la temperatura de aceite.

- **Falla Total.**
Paro total de la máquina.

- Falla Parcial.

Sobrecalentamiento del sistema.

4. Modos de falla

Los modos de falla describen la forma en que las fallas ocurren.

- Modo de falla 1.

Calentamiento de aceite (MF_1).

- Consecuencias.

La máquina se detiene por completo.

Daño en algunos componentes por exceso de calor.

Fugas de aceite.

- Modo de falla 2.

Falta de presión en la máquina (MF_2)

- Consecuencias.

La máquina no puede inyectar el plástico.

La calidad del producto se reduce.

Aumento de rechazos.

*Si el aceite esta caliente **no** se tiene la presión necesaria, por lo tanto la máquina no funciona.*

5. Estimación de confiabilidad.

Se tomo una muestra de los tiempos de falla de la empresa Plásticos y Metales de Coahuila, con el objetivo de realizar una administración efectiva de las actividades de mantenimiento requerido por la máquina No 5. Se obtuvo una muestra de 13 tiempos de falla, los cuales se muestran en la tabla 6.5

Tabla 6.5: Tiempos de Falla (Hrs).

Calentamiento de Aceite	Falta de Presión
4080	7680
180	3600
840	1080
1800	1860
930	420
270	150
20430	19500
3540	1680
290	810
300	840
810	3660
7800	2220
1340	1830

Tabla 6.6: Coeficientes de Correlación.

	Pearson	τ Kendall
Coefficiente	0.910	0.619
Valor P	0.000	0.015

- Prueba de correlación

La tabla 6.6 muestra, que los valores de probabilidad son 0.000 y 0.015, es posible afirmar que existe correlación entre los modos de falla. El coeficiente Pearson es 0.910 y τ igual a 0.619 esto prueba que existe una correlación positiva.

- Prueba de bondad de ajuste

Debido a que la muestra de la tabla 6.5 es pequeña, se estimarán los parámetros mediante el método propuesto por (Abernethy, 2008), los resultados se muestran en las tablas 6.7 y 6.8

Tabla 6.7: Resumen de Tiempos de Falla Calentamiento de Aceite (MF_1).

Distribución	Weibull	
Parámetros	Escala	2,711
	Forma	0.642
AD	0.457	
P-value	0.243	

La tabla 6.7 muestra que los tiempos de falla por calentamiento de aceite, se distribuyen de forma Weibull con un valor de probabilidad de 0.243. Con parámetro de forma igual a 0.642 y escala 2, 711.

Tabla 6.8: Resumen de Tiempos de Falla Falta de Presión (MF_2).

Distribución	Weibull	
Parámetros	Escala	3,182
	Forma	0.784
AD	0.406	
P-value	> 0.250	

De acuerdo a la tabla 6.8 muestra que los tiempos de falla por falta de presión, se distribuyen de forma Weibull con nivel de confianza del 95 % y un valor de probabilidad de > 0.250. Con parámetro de forma igual a 0.784 y escala 3, 182.

Tabla 6.9: Prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada

	Cópula de Gumbel	Log-Normal Multivariada	Weibull Multivariada
Valor P	0.828	0.000	0.049

La tabla 6.9 muestra los valores de probabilidad correspondientes a la prueba Kolmogorov-Smirnov Multivariada. Con un nivel de confianza del 95 %, es posible afirmar que el modelo de cópulas tiene un mejor ajuste que los modelos Log-Normal y Weibull multivariados.

- Construcción del modelo (considerando la dependencia)

Suponiendo que los modos de falla son **independientes** la función de confiabilidad es:

$$R_i(t) = \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t}{2711} \right)^{0.642} + \left(\frac{t}{3182} \right)^{0.784} \right] \right\} \quad (6.8)$$

La figura 6.6 muestra la gráfica de la función de confiabilidad suponiendo independencia entre las fallas.

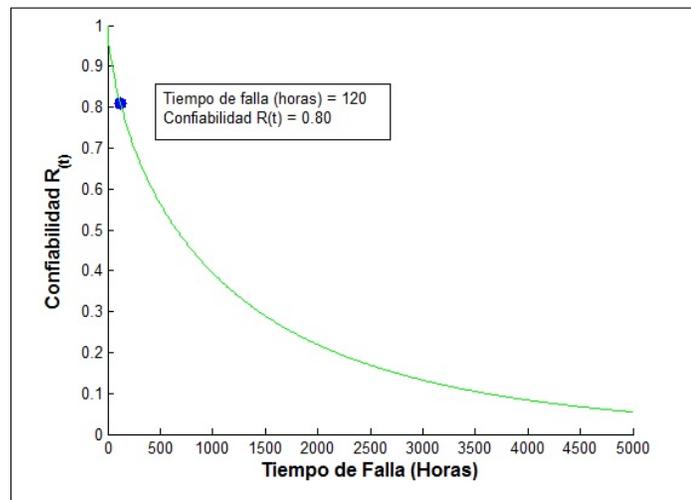


Figura 6.6: Gráfica de Confiabilidad Independencia (PYMCSA).

Con base en el análisis anterior se establece que tendrán que pasar 120 horas; el intervalo de confianza para el tiempo de falla, con un nivel de confianza del 95 %, establece que tendrán que pasar al menos 78.12 y como máximo 167.21 horas, para que la válvula termostática tenga una probabilidad de falla del 20 %, es decir el 80 % de confiabilidad. Con la estimación anterior se podrán administrar las actividades del plan de mantenimiento para el sistema de refrigeración de la máquina.

Por registros en la bitácora, se sabe que la máquina de inyección trabaja

15.5 horas diarias y solo 6 días por semana, por lo tanto las horas de trabajo mensuales son:

$$HM = (6)(15.5)(4.3) = 402 \text{ hrs} \quad (6.9)$$

El número de reparaciones mensuales se estima de la siguiente forma.

$$NR = \frac{402}{120} \approx 3 \quad (6.10)$$

De acuerdo a lo anterior la válvula termostática deberá ser reemplazada 3 veces al mes. Sin embargo, es importante realizar un intervalo de confianza dado que es una predicción. La forma adecuada de realizarlo es mediante la distribución Poisson debido a la distribución de los reemplazos. El modelo muestra que deberán hacerse al menos 3 y como máximo 5 reemplazos mensualmente, el costo de reparación de la válvula es de 3,700 pesos.

El costo anual de mantenimiento se estima como se muestra en la expresión 6.11

$$CAM = (12)(3)(3700) \quad (6.11)$$

Por lo tanto el costo anual de mantenimiento es al menos de 133,200 MXN y máximo 177,600 MXN.

Sin embargo, mediante el coeficiente de correlación τ es posible demostrar que el supuesto de independencia no se cumple para este caso específico. Por lo tanto, es necesario utilizar la ecuación (4.78) para estimar la confiabilidad.

$$R_d(t) = \exp \left\{ - \left\langle \left[\left(\frac{t}{2711} \right)^{0.642} \right]^{3.21} + \left[\left(\frac{t}{3182} \right)^{0.784} \right]^{3.21} \right\rangle^{\frac{1}{3.21}} \right\} \quad (6.12)$$

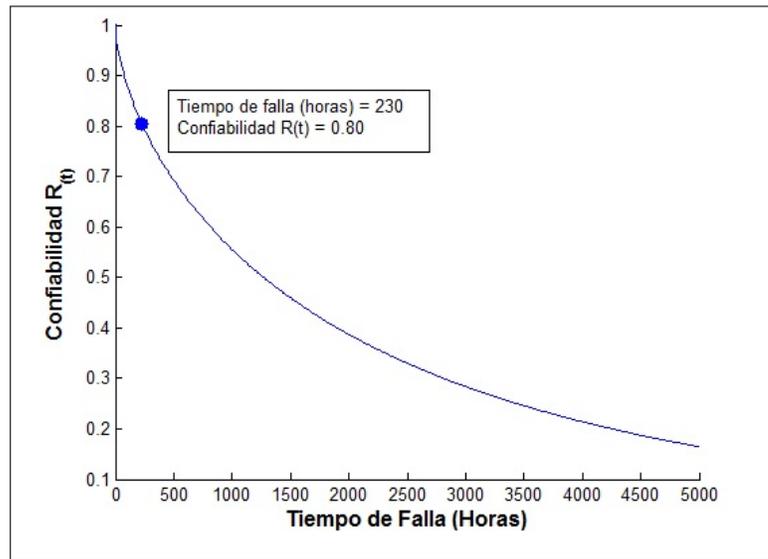


Figura 6.7: Gráfica de Confiabilidad (PYMCSA).

Con base en el análisis anterior se puede establecer que tendrán que pasar 230 horas; con el intervalo de confianza al 95 % tendrán que pasar al menos 182.43 y como máximo 279.78 horas, para que la válvula termostática tenga una probabilidad de falla del 20 %, es decir 80 % de confiabilidad. Tal estimación deberá ser incluida en la metodología RCM para administrar de manera eficiente las actividades del plan de mantenimiento.

El tiempo de operación mensual es igual a 402 horas.

El número de reparaciones mensuales es igual a:

$$NR = \frac{402}{230} = 1.74 \quad (6.13)$$

Debido a que el número de reparaciones mensual es 1.74. Es posible determinar el número de reemplazos del componente a través de un modelo Poisson, el modelo muestra que se debe hacer solo un reemplazo mensual. El intervalo de confianza al 95 % establece que deben hacerse entre 0 y 2 reemplazos mensuales.

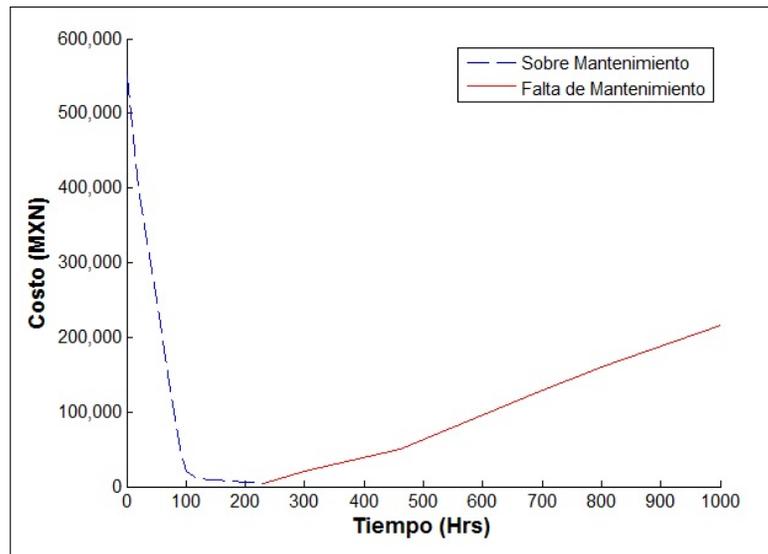


Figura 6.8: Función de Costo.

La figura 6.8 muestra, que realizar el reemplazo del componente antes de las 230 horas, tendrá por consecuencia el sobre mantenimiento del componente y programar el reemplazo del componente después de las 230 horas indica falta de mantenimiento. Con la información anterior, es posible estimar el costo anual de reparación.

$$CAM = (12) (1) (3700) \quad (6.14)$$

Por lo tanto el costo anual de mantenimiento es de 44,400 MXN.

Tabla 6.10: Comparación de Modelos (PYMCSA).

	Independencia	Dependencia
Tiempo (hrs)	120	230
Costo Anual (MXN)	133,200	44,400

La información de la tabla 6.10 muestra que el modelo que considera dependencia entre las fallas genera ahorros para la empresa del 66 % en el costo anual de mantenimiento.

Adicionalmente, es necesario considerar los ahorros por paro de máquina. Por registros en la bitácora, se sabe que la máquina se detiene 2.5 horas cuando se presenta el modo de falla del calentamiento o falta de presión. Si la producción por hora es de 310 piezas con un costo de 14.80 MXN por pieza,

$$PM = (2.5) (310) (14.80) \quad (6.15)$$

entonces el costo de paro de máquina es de 11,470 MXN.

Los reportes de mantenimiento muestran que se realizan 4 mantenimientos correctivos al mes ya sea por aceite caliente o falta de presión.

$$CPM = (11470) (4) = 45,880 \quad (6.16)$$

El costo de paro de máquina anual es

$$CPMA = (45,880) (12) = 550,560 \text{ MXN} \quad (6.17)$$

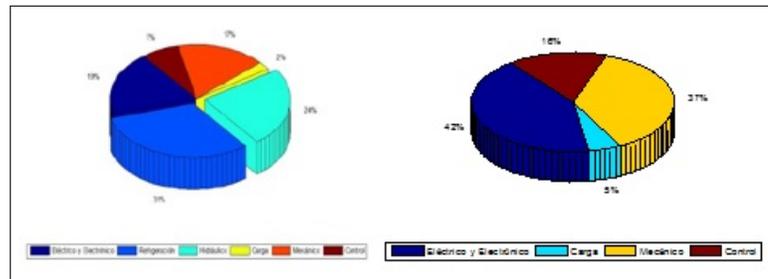


Figura 6.9: Gráfica Fallas (PYMCSA).

Debido a que no se presentaron más fallas en el sistema de refrigeración y presión después de la implementación de las actividades del plan de mantenimiento centrado en confiabilidad, es posible sumar el costo de paro de máquina anual y el ahorro generado por considerar el modelo de cópulas. Por lo tanto, el ahorro total es de 639,360 MXN. En el apéndice B se muestra una parte del plan de mantenimiento centrado en confiabilidad para la máquina de inyección de plástico oriente.

Capítulo 7

Conclusiones

La metodología del mantenimiento centrado en confiabilidad (RCM) es una estrategia de mantenimiento actual donde la estimación de la probabilidad de falla es parte vital del RCM, por lo tanto, estimar esta probabilidad de forma adecuada tendrá como consecuencia planes de mantenimiento confiables para los equipos.

Los resultados de esta investigación muestran que existe una diferencia considerable si el comportamiento de los equipos es modelado a través modelos que suponen independencia entre los modos de falla, ésto tiene como consecuencia un sobre mantenimiento en los equipos.

Entonces para estimar la confiabilidad en la metodología RCM es necesario incorporar modelos que consideren la dependencia. No llevar acabo lo anterior, tendrá efectos negativos en la modelación del comportamiento de las fallas en los equipos y por consecuencia, los planes de mantenimiento serán poco confiables; motivo por el cual se desarrolló la presente investigación. Respuesta a las preguntas de investigación.

Con el fin de obtener planes de mantenimiento confiables para los equipos, se desarrolló una metodología considerando modelos multivariados de probabilidad y

cóputas de Gumbel, resultando éste último ser adecuado para éste caso. El modelo de cóputas se construye mediante las distribuciones marginales Weibull, con el fin de estimar la confiabilidad cuando existe dependencia entre los modos de falla. Éste modelo proporcionará un soporte estadístico a la probabilidad de falla. Esto prueba que se cumple con el objetivo.

Con un soporte estadístico confiable en la estimación de la probabilidad de falla, es posible determinar la frecuencia de las actividades del plan de mantenimiento para los equipos, lo cual trae como beneficio ahorros significativos para la empresa reduciendo los costos de mantenimiento más del 30 %. Probando con esto la hipótesis planteada en este trabajo.

Algunas de las ventajas que tiene utilizar el modelo de cóputas sobre los que suponen independencia son:

- Construye una relación entre las distribuciones marginales de los componentes que tienen correlación y la función de distribución conjunta multivariada.
- Es posible caracterizar la estructura de la dependencia independientemente de las distribuciones marginales.
- En los trabajos revisados los autores afirman que es la forma más apropiada, sencilla de aplicar y se obtienen mejores resultados en cuanto a la descripción de la dependencia.
- El problema del modelo de cóputas es que no permite modelar la dependencia a través del tiempo (Plascencia 2009), (Escarela 2009), (Lopera 2009), (Huang 2011).

En cuanto al trabajo futuro, se desea extender la metodología propuesta para sistemas reparables, debido a que reemplazar algunos componentes del equipo no es

del todo rentable, por lo tanto éstos componentes solo deben ser reparados. Además, también poder incluir más familias de cópulas, con el objetivo de hacer una metodología RCM más completa.

Bibliografía

- Abernethy, R. (2008). *The new weibull handbook* (Fifth ed.). Published and Distributed by Robert B. Abernethy.
- Baeza, G. (2003). Evaluación de confiabilidad de sistemas de distribución eléctrica en desregulación. *Facultad de ingeniería*.
- Bevilacqua, M., et al . (2005). Aplicación de rcm a un proceso de cambio en refinería de petróleo (falconara marittima). *Taylor & Francis*.
- Brago, H., et al . (2010). Estimación de la confiabilidad para modelos de riesgos en competencia dependientes usando cópulas. *VII coloquio regional de estadística*.
- Chen, Y., y Zhang, T. (2012). Application & development of reliability centered maintenance (rcm) in china's nuclear energy field. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*.
- Clayton, D. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological. *Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence*.
- D' Agostino, R., y Stephens, M. (1986). *Goodness of fit techniques*. CRC Press. (ISBN: 0824774876, pp. 567)
- Deshpande, V. (2002). La aplicación de rcm por consideraciones de seguridad en una planta de acero. *Reliability Engineering and System Safety*.
- Deshpande, V., y Mahant, P. (2013). Application of reliability centred maintenance methodology to develop maintenance program for a heavy duty hydraulic

- stretching machine. *Australian Journal of Multi-Disciplinary Engineering*.
- Dodson, B. (1994). *Weibull analysis*. Milwaukee, Wisconsin: ASQ Quality Press.
- Dodson, B., y Nolan, D. (1999). *Reliability engineering handbook*. New York: Marcel Dekker Inc. (Quality Publishing)
- Escarela, G., y Hernández, A. (2009). Modelado de parejas aleatorias usando cópulas. *Revista Colombiana de Estadística*.
- Escobar, R., et al . (2003). Confiabilidad: Historia, estado del arte y desafíos futuros. *Dyna Universidad Nacional de Colombia*, vol. 70(pp. 140).
- Espinosa, F., et al . (2010). Un procedimiento para evaluar el riesgo de la innovación en la gestión del mantenimiento industrial. *Revista Chilena de ingeniería*.
- García, J. (2011). Factores relacionados con el éxito del mantenimiento. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*.
- Gertsbakh, I. (2000). *Reliability theory with applications to preventive maintenance*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Gumbel, E. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*.
- Huang, M., et al . (2011). An approach for improvement of avionics reliability assessment based on copula theory. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*.
- Hung, A. (2008). Mantenimiento centrado en confiabilidad como estrategia para apoyar los indicadores de disponibilidad y paradas forzadas en la planta os-car a. machado edc. *Revista de Ingeniería Energética, facultad de ingeniería eléctrica*.
- Lijumn, H., et al . (2012). Application of rcm analysis based predictive maintenance in nuclear power plants. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*.
- Lopera, C., et al . (2009). Selección de un modelo cópula para el ajuste de datos

- bivariados dependientes. *DYNA*.
- Manotas, E., et al . (2008). Estudio del efecto de la dependencia en la estimación de la confiabilidad de un sistema con dos modos de falla concurrente. *Universidad Nacional de Colombia*.
- Mckenna, T. (1997). *Glossary of reliability and maintenance terms*. Houston Texas: Gulf Publishing Co.
- Mobley, R., et al . (2008). *Maintenance engineering handbook*. McGrawHill.
- Modarres, M., et al . (1999). *Reliability engineering and risk analysis a practical guide*. New York Basel: Marcel Dekker Inc.
- Moubray, J. (1997). *Reliability centered maintenance* (Second ed.). New York: Industrial press Inc.
- Murhi, V. (2003). A simulation based approach for determining maintenance strategies. *The University of Tennessee, Knoxville*.
- Nakagawa, T. (2005). *Maintenance theory of reliability*. Springer.
- Nelsen, R. (2006). *An introduction to copulas* (Second ed.). Springer Series in Statistics.
- Nelson, W. (1985). *Applied life analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Okasha, N., y Frangopol, D. (2009). Lifetime oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability. *Redundancy and life-cycle cost Journal Elsevier*.
- Penkova, M. (2007). Mantenimiento y análisis de vibraciones. ciencia y sociedad. *Instituto Tecnológico de Santo Domingo*.
- Pham, H. (2006). *Springer handbook of engineering statistics*. Instituto Tecnológico de Santo Domingo: Springer-Verlag London Limited.
- Rahimdel, M., et al . (2013). Reliability-based maintenance scheduling of hydraulic system of rotary drilling machines. *Journal Elsevier*.

- Stephens, M. (1974). *Edf statistics for goodness of fit and some comparisons* (Vol. 69). The American Statistical Association. (pp. 730-737)
- Torres, A. (2012). Rol del fallo mecánico en la optimización del mantenimiento en una central nuclear ingeniería mecánica. *Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría*.
- Yssaad, B., et al . (2013). Reliability centered maintenance optimization for power distribution systems. *Journal Elsevier*.
- Zacks, S. (1992). *Introduction to reliability analysis: Probability models and statistical methods*. Springer-Verlag.
- Zapata, C., et al . (2009). Modelamiento de componentes de sistemas compuestos generación transmisión para estudios de confiabilidad. *Scientia Et Technica. Universidad Tecnológica de Pereira*.