

**CORPORACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN EN
MATERIALES**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**CARTA DE CONTROL MULTI-ATRIBUTO D^2 EMPÍRICA
CONSIDERANDO TAMAÑOS DE MUESTRA INSUFICIENTES**

TESIS

PRESENTA

ESMERALDA RAMÍREZ MÉNDEZ

DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

EN INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE MANUFACTURA

SALTILLO, COAHUILA.

MARZO DE 2019.

**CARTA DE CONTROL MULTI-ATRIBUTO D^2 EMPÍRICA
CONSIDERANDO TAMAÑOS DE MUESTRA INSUFICIENTES**

*Por
Esmeralda Ramírez Méndez*

Tesis

Presentada al Programa Interinstitucional en Ciencia y Tecnología

Sede

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales, S. A. de C. V.

Como requisito parcial para obtener el Grado Académico de

*Doctor en Ciencia y Tecnología
en Ingeniería Industrial y de Manufactura*

Programa Interinstitucional en Ciencia y Tecnología COMIMSA / CONACyT

Saltillo, Coahuila. A 30 de Marzo de 2019.

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales, S.A de C.V
Gerencia de Desarrollo Humano
División de Estudios de Posgrado

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial recomendamos que la Tesis **“CARTA DE CONTROL MULTI-ATRIBUTO D^2 EMPÍRICA CONSIDERANDO TAMAÑOS DE MUESTRA INSUFICIENTES”**, realizada por el alumno **ESMERALDA RAMÍREZ MÉNDEZ** matrícula **1206IM1089** sea aceptada para su defensa como Doctor en Ciencia y Tecnología en **Ingeniería Industrial y de Manufactura**.

El Comité Tutorial

Dr. David Salvador González González
Director de Tesis

Dr. Pedro Pérez Villanueva
Tutor en Planta

Vo. Bo.
Dr. Pedro Pérez Villanueva
Coordinación General de Estudios de Posgrado
COMIMSA

Corporación Mexicana de Investigación en Materiales, S. A. de C. V

Gerencia de Desarrollo Humano

División de Estudios de Posgrado

Los abajo firmantes, miembros del Jurado de Examen de Grado del alumno Esmeralda Ramírez Méndez, una vez leída y revisada la Tesis titulada “**CARTA DE CONTROL MULTI-ATRIBUTO D^2 EMPÍRICA CONSIDERANDO TAMAÑOS DE MUESTRA INSUFICIENTES**”, aceptamos que la referida tesis revisada y corregida sea presentada por el alumno para aspirar al grado de Doctor en Ciencia y Tecnología con opción terminal de Ingeniería Industrial y de Manufactura durante el Examen de Grado correspondiente.

Y para que así conste firmamos la presente a los 30 días del mes de Marzo del año 2019.

Dr. Luis Martín Torres Treviño
Presidente

Dra. Irma Delia García Calvillo
Secretario

Dra. Rocío Maricela Ochoa Palacios
Vocal

Dr. Víctor Hugo López Cortes
Vocal

Dr. Rolando Javier Praga Alejo
Vocal

A MIS PADRES

Isidro y María Magdalena

A MIS HERMANOS

Isidro, Juan, Pedro e Idalia

A MIS SOBRINOS

A todos

A MI FAMILIA

David, Daniela y Pamela

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Isidro Ramírez y María Magdalena Méndez; y a mis hermanos Isidro, Juan, Pedro e Idalia Ramírez por su apoyo incondicional.

A mi buenas amigas Argelia Miranda y Déniz Ramos por su apoyo y amistad incondicional.

A mi tutores, Dr. Mario Cantú Sifuentes y Dr. David González González por compartir sus conocimientos y brindarme su amistad.

A los académicos que de forma directa e indirecta contribuyeron en mi formación, Dr. Rolando Praga Alejo y la Dra. Argelia Miranda Pérez; por su apoyo y conocimientos; gracias por su amistad.

A todos mis compañeros y amigos, que conocí durante mis estudios y que siempre los llevaré presentes, especialmente: a todos.

Al Dr. Pedro Pérez Villanueva, coordinador del Posgrado de COMIMSA por el apoyo brindado durante mis estudios.

Al Jurado: por sus excelentes comentarios y recomendaciones, que contribuyeron en la mejora de esta investigación.

A las personas que día a día hacen posible el desempeño del Posgrado COMIMSA, Lic. María de Jesús Vega, Mtra. Pilar Granillo, Lic. Blanca Esthela Valdés y a Lic. Silvia Silva, personal administrativo del posgrado, gracias por su incansable labor y amistad.

RESUMEN

Un producto o servicio debe cumplir con las características que son establecidas por el cliente final. Mismas que son llamadas *características de calidad*, ya que mediante su valoración puede determinarse la calidad del producto o servicio. Cuando no pueden expresarse en términos de una escala continua de medición, se les denomina *atributos*.

El control estadístico de procesos es un conjunto de técnicas que contribuyen al mejoramiento de la calidad de cualquier proceso industrial. En particular, las cartas de control son herramientas para monitorear y detectar cambios en la calidad del proceso. Sin embargo, cuando las variables de un proceso son de naturaleza discreta, como es el caso de los atributos de calidad, el uso de una carta de control puede implicar un costo de muestreo alto. Adicionalmente, hay situaciones donde es difícil recolectar grandes conjuntos de datos, por ejemplo, cuando el estándar de producción es bajo, cuando la inspección de calidad consista en pruebas destructivas, o si se requiere una reducción de costos de inspección. Por otra parte, usar muestras pequeñas afecta el desempeño de las cartas por atributo convencionales y puede conducir a conclusiones erróneas sobre estado actual del proceso. En este contexto, se propone un método de monitoreo eficiente para tamaños de muestra *pequeños*.

La propuesta se construyó con base en un estadístico de prueba basado en una generalización de la de distancia de Mahalanobis y el concepto de distribución empírica. Se midió el desempeño de la carta considerando como criterio la longitud promedio de corrida. Se realizaron comparaciones entre la carta propuesta y la carta convencional, se encontró que la carta propuesta es más eficiente y económica, en términos del tamaño de muestra.

Palabras Clave: Cartas de control multi-atributo, multinomial, distribución empírica, ARL, muestras pequeñas.

Área Específica: Control Estadístico de Procesos.

Tabla de Contenido

Introducción	2
Planteamiento del Problema	6
2.1 Descripción del problema de investigación	6
2.2 Objetivos	7
2.3 Hipótesis	7
2.4 Justificación	7
Revisión Bibliográfica	9
Marco Teórico	16
4.1 Gráficos de Control.....	16
4.2 Gráficos de control para atributos.....	18
4.2.1 El gráfico p	20
4.2.2 El gráfico np	21
4.2.3 El gráfico c	23
4.2.4 El gráfico u	24
4.3 Gráficos de control multi-atributo	25
4.4 Carta D^2 de Mahalanobis para procesos multinomiales	27
4.5 Medidas de desempeño	28
4.5.1 Pruebas de hipótesis	28
4.5.2 Potencia de una prueba.....	30
4.5.3 Longitud promedio de corrida.....	31
4.6. Pruebas de bondad de ajuste: Kolmogorov-Smirnov.....	32
4.7 Método Monte Carlo.....	34
4.8 Carta de control D^2 empírica	35
4.8.1 Descripción de la carta D^2 empírica.....	36
Metodología	42

5.1	Procedimiento para monitorear un proceso empleando la carta D^2 empírica	42
	Aplicación y medición del desempeño de la carta D^2 empírica	45
6.1	Descripción del proceso	45
6.1.1	Inspección en el proceso FSW	46
6.2	Aplicación de la carta D^2 empírica.....	47
6.3	Desempeño de la carta D^2 empírica en el proceso FSW	49
	Conclusiones.....	52
	Referencias Bibliográficas	55
	Apéndice A1: Potencia de la carta D^2 de Mahalanobis (convencional)	60
	Apéndice A2: Carta D^2 de doble muestreo ponderado	¡Error! Marcador no definido.

Lista de Figuras

Figura 1.1. Carta de control para una variable de un proceso	3
Figura 6.1. Dibujo esquemático del proceso FSW (Rajiv and Murray, 2007).....	45
Figura 6.2. Macrografías de piezas defectuosas del proceso FSW.	46
Figura 6.3. (a) Carta de control D^2 empírica y (b) Carta de control D^2 convencional.....	48
Figura 6.4. (a) ARL para la carta D^2 y (b) ARL para la carta D^2 empírica.....	49

Lista de Tablas

Tabla 4.1. Diseños para las cartas D^2 empírica y D^2 (convencional) para $k = 4$	42
Tabla 6.1. Datos registrados de un proceso FSW local.....	49
Tabla 6.2. Proporciones observadas del proceso FSW.....	49

Capítulo 1

Introducción

La calidad es un aspecto imprescindible en la fabricación de productos. Como es sabido, hay factores que introducen variación en un proceso de producción, por ejemplo, la materia prima varía de lote en lote, las máquinas y herramientas se desgastan. Entonces, resulta necesario que los procesos operen bajo condiciones de variación que no representen un problema en la calidad del producto final. Para este fin, se han desarrollado herramientas estadísticas llamadas gráficos o cartas de control (GC), que sirven para monitorear la variación presente en los procesos y ayudan a identificar cuando ocurre algún cambio en la misma. Un GC forma parte de un conjunto de herramientas llamadas Control Estadístico de Procesos (CEP). Su utilización contribuye a la reducción de la variabilidad del proceso; permitiendo mejorar su calidad.

Walter A. Shewhart presentó, en 1924, el primer bosquejo de un GC *univariado*, desde entonces, se han propuesto un gran número de estas herramientas. La Figura 1.1 muestra un ejemplo de un GC diseñado para monitorear la media, \bar{x} , de un grupo de observaciones tomadas de un proceso sobre una variable en un mismo punto en el tiempo.

Un GC es una representación gráfica de una secuencia de pruebas de hipótesis que se realizan a lo largo del tiempo acerca de si el proceso está o no dentro de control. Para tal efecto, en instantes de tiempo se calcula el valor de un *estadístico* dado, con información muestral proveniente del proceso. Cada valor se representa con un punto en la gráfica y es comparado con dos líneas llamadas *límites de control* (ver Figura 1.1). Mientras que los puntos se grafiquen dentro del intervalo comprendido por tales límites, es razonable

suponer que el proceso está dentro de control estadístico. Una *señal fuera de control* ocurre cuando un punto sale de los límites de control, lo que indica que el proceso está operando bajo causas especiales de variación. Por otra parte, hay cierta probabilidad de que la carta dé una *falsa alarma*, esto es, una señal fuera de control cuando el proceso está bajo control.

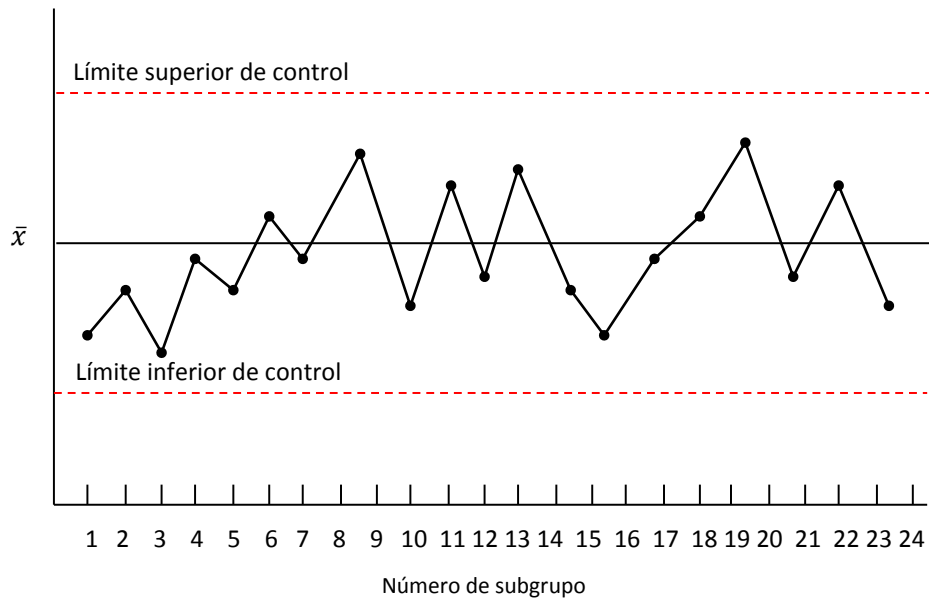


Figura 1.1. Carta de control para una variable de un proceso

Una clasificación general de los GC se da según el tipo de variable que es capaz de monitorear: GC para *variables continuas* conocidas como GC para variables; GC para *variables discretas* llamadas GC para atributos. Los primeros son útiles para monitorear variables que pueden expresarse en alguna escala continua de medición, por ejemplo, el diámetro interno de un rotor para uso automotriz. Por su parte, los GC para atributos se usan cuando la variable se expresa en una escala nominal u ordinal, es decir, la variable se expresa como una clasificación de artículos según ciertas características o atributos. Por ejemplo, suponga que en lugar de obtener la medida del diámetro del rotor se emplea un dispositivo mediante el cual es posible decidir si la pieza tiene el diámetro correcto o no, sin necesidad de obtener la magnitud exacta. En este caso, la pieza se clasifica como

conforme si se determina que el diámetro es el correcto y como *no conforme* en caso contrario, también se les conoce como variables categóricas.

Con frecuencia los GC se usan para detectar cambios inusuales en variables que son independientes y no son influenciadas por el comportamiento de otras variables (GC univariados). Sin embargo, hay muchos entornos industriales donde el desempeño del proceso se basa en el comportamiento de un conjunto de variables relacionadas entre sí (Mason & Young, 2002). En estos casos, el uso de un GC univariado puede no ser apropiado debido a que solo pueden monitorear una variable a la vez y no consideran su posible correlación. Los procedimientos de control multivariado están diseñados para monitorear más de una variable simultáneamente y considerar la relación entre ellas.

Cada vez es más común que las variables o características de calidad sean expresadas mediante niveles de atributos. Esto ocurre porque obtener sus valores continuos puede resultar caro o, en algunos casos, inviable (Li, et al., 2014). Por otra parte, hay procesos en los que de manera natural las piezas se clasifican según algún defecto o característica no deseable. Algunas situaciones reales que sirven de ejemplos y motivan esta investigación se describen a continuación.

Proceso de fabricación con una operación de soldadura. En una compañía local que manufactura *convertidores de torque*, uno de los procesos para obtener sub-ensambles consiste de cinco operaciones. En la primera operación se unen dos piezas mediante soldadura (*bomba y buje*), en las operaciones 2, 3 y 4 se maquinan la parte superior e interna de la pieza completa. El siguiente paso consiste en tratar térmicamente el *buje*. Finalmente, se inspecciona cada pieza producida y se clasifica como *buena* o *defectuosa*. Una pieza es defectuosa si presenta cualquiera de los siguientes defectos: *soldadura incompleta, soldadura porosa, soldadura socavada, exceso de soldadura, cordón delgado, fuera de posición y fuga*. En los casos donde la pieza presenta más de un defecto, se elige el más predominante según criterios establecidos por la compañía.

Proceso de vaciado. En este proceso se obtienen piezas que forman parte de los asientos de un automóvil. Consiste en fundir el metal, vaciar el metal fundido en moldes donde fluye por gravedad, se deja enfriar para finalmente obtener la pieza sólida. Las piezas

terminadas pueden presentar los siguientes defectos: *poros, grietas o rechupes, mal acabado, rebabas, incrustaciones de metal y mal troquelado*. Si una pieza presenta cualquiera de estos defectos se considera desperdicio.

Proceso de fabricación de porcelana decorada. En un artículo publicado por Taleb (2009) se presenta la aplicación de GC multi-atributo en una empresa que manufactura porcelana decorada. El proceso consta de una fase de preparación del material, una de transformación mediante prensas y finalmente las unidades se esmaltan y hornean. Después de la fase del horno, las unidades producidas se clasifican en las siguientes características de calidad simultáneamente: Apariencia (A), Blancura (B) y Translucidez (T). Las características de calidad del proceso pueden estar influenciadas por una o más fases. Por lo que utilizar cartas de control multivariado puede ser más apropiado. (A), (T) y (B) no se miden numéricamente, sino que se expresan mediante términos lingüísticos. Los términos para (A) son: Estándar, Segunda Selección y Tercera Selección. Los términos de (B) son: Alto, Medio, Bajo. Los términos para (T) son Translucidez Perfecta, Buena Translucidez, No translucido. Así por ejemplo, una pieza puede clasificarse en la categoría descrita por Apariencia estándar, Blancura Alta y Translucidez Perfecta. Cada posible combinación de términos lingüísticos corresponde a una categoría, es decir, se tiene un total de 36 categorías.

Cuando se monitorea un proceso mediante un GC es necesario extraer muestras del proceso e inspeccionarlas, esto representa un costo. Es común, que los GC por atributos requieren mucha más información para operar, con cierta precisión estadística, que los GC para variables. Por otra parte, no en todos los procesos de producción se manufacturan grandes cantidades de productos por turno como para generar toda la información que la mayoría de los GC por atributo requieren. En todo caso, son preferibles herramientas de monitoreo en los que el costo de muestreo sea mínimo.

En este trabajo se investigan posibles soluciones para el problema que representa el costo del muestreo y se acota al contexto de GC para procesos como los descritos, donde existe la necesidad de monitorear, simultáneamente, más de un atributo.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

En este capítulo se describe el problema de investigación. Así mismo, se presentan las hipótesis, los objetivos y la justificación.

2.1 Descripción del problema de investigación

El empleo de gráficos de monitoreo requiere tareas rigurosas de muestreo e inspección, donde la recolección de información puede ser muy costosa, o bien, algunos procesos pueden no generar la cantidad de información suficiente como para monitorear eficientemente el proceso. En este sentido, considerando que muchos de los gráficos de monitoreo para procesos multi-atributo requieren tamaños de muestra notablemente grandes (ver por ejemplo Taleb y Liman, 2006) el tamaño de muestra se torna en un tema de interés.

Las cartas para el monitoreo de procesos multia-atributo se basan en aproximaciones a distribuciones continuas como la normal multivariada, Ji-cuadrada y otras. Dada su naturaleza asintótica, tales aproximaciones se cumplen cuando el tamaño de muestra es lo suficientemente grande. De lo contrario, no se puede garantizar que la carta tenga un buen desempeño; esto puede llevar a cometer errores graves, como concluir que el proceso está en control cuando no es así. Técnicamente, el uso de tamaños pequeños en estas cartas puede incrementar la probabilidad de cometer los errores tipo I y II, esto se aborda más detalladamente en la sección 4.5 y en el anexo A1 de este documento.

Para medir el desempeño de una carta, comúnmente se usa la Longitud Promedio de Corrida (ARL, por sus siglas en inglés, Average Run Length), que denota el número de muestras que en promedio se requieren para una señal fuera de control. Es una medida de

rapidez de detección, por lo tanto, una carta de control se considera eficiente si cumple con lo siguiente:

- Si el proceso está en control: Se espera que el ARL sea grande de manera que se tenga una baja tasa de falsas alarmas. Esto está asociado al error tipo I.
- Si el proceso está fuera de control: Se espera que el ARL sea pequeño de modo que la detección sea rápida (relacionado al error tipo II).

De esta manera, la problemática central de esta investigación se enfoca en la necesidad evidenciada de construir gráficos de control multi-atributo, libres de supuestos distribucionales, que minimicen el efecto del tamaño de muestra sobre la precisión del monitoreo del proceso.

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general

Desarrollar un gráfico de control de procesos multi-atributo que sea eficiente, en términos de ARL, para muestras *pequeñas*.

2.2.2 Objetivos Específicos

1. Evaluar el desempeño de la carta de control propuesta.
2. Establecer diseños eficientes que faciliten el uso de la carta propuesta.
3. Aplicar la carta propuesta en un proceso real.

2.3 Hipótesis

Es posible construir diseños de monitoreo eficientes (en términos de ARL) para procesos multi-atributo, mediante el uso de la distribución empírica del estadístico D^2 para la obtención de límites de control, considerando el tamaño de la muestra.

2.4 Justificación

Cuando se monitorea un proceso, es necesario realizar actividades que requieren personal e instrumentos de medición. En la medida que la cantidad de piezas por muestra incrementa

también lo hace el tiempo y la cantidad de recursos requeridos, por lo tanto, el costo del muestreo aumenta. Por otra parte, hay situaciones donde las pruebas realizadas sobre las piezas son destructivas. En cualquier caso, son preferibles métodos de monitoreo que puedan operar eficientemente con muestras pequeñas, de manera que el costo por muestreo e inspección sea bajo.

Procesos como los descritos en el capítulo 1 de este documento, justifican el desarrollo de esta investigación. Por otra parte, en la literatura se sugiere la necesidad de investigación enfocada al monitoreo de procesos multi-atributo (Li, et al., 2014).

Adicionalmente, resulta práctico y económico el uso de una carta de control multi-atributo en lugar de varias uni-atributo, especialmente cuando se monitorea una cantidad considerable de atributos de manera simultánea, ya que el número de cartas de control uni-atributo es tan grande como el número de atributos a monitorear. Una carta de control eficiente contribuye en el aseguramiento de la calidad del producto final.

Capítulo 3

Revisión Bibliográfica

Los gráficos más conocidos para monitorear variables categóricas son los gráficos p y np para procesos binomiales; los gráficos c y u para variables Poisson. Woodal (1997) presenta una revisión detallada. Algunos trabajos más recientes son los presentados por De Araújo Rodrigues et al. (2011) y Kooli & Liman (2011), con el fin de reducir los costos de muestreo y mejorar la eficiencia, proponen el uso de doble muestreo y además de un enfoque adaptivo en el gráfico np , respectivamente. Por su parte, Ho et al. (2010) proponen un nuevo estadístico para la carta p , dando lugar a una carta con una tasa de falsas alarmas menor, pero no más sensible que su contraparte. Para variables Poisson, Perez et al. (2010) presentan una mejora del gráfico de control u también bajo el enfoque de doble muestreo. Epprecht et al. (2010) proponen un gráfico c integrando el método promedio móvil exponencialmente ponderado, considerando además el enfoque adaptativo.

Los enfoques univariados antes mencionados, proporcionan un buen método para identificar *causas asignables* que provocan cambios inusuales en procesos categóricos, sin embargo, al monitorear solo un atributo a la vez están limitados cuando los datos son correlacionados y no correlacionados (Topalidou y Psarakis, 2009). Cuando es necesario evaluar la calidad de un producto respecto a varios atributos, posiblemente correlacionados, se deben considerar métodos de control multi-atributo.

En la literatura pueden encontrarse una gran cantidad de trabajos enfocados al monitoreo multivariado para el caso continuo; ver Bersimis et al. (2007) para una revisión. Esto no ocurre en el monitoreo multivariado de variables categóricas (Li, et al., 2014), sin embargo, según Haridy et al. (2014), es un campo cuya aplicación está extendiéndose.

Dicho fenómeno se debe a la simplicidad con la que se pueden manipular características de calidad categóricas, a la capacidad de revisar múltiples requerimientos de calidad y a la prevalencia de datos de conteo en el sector industrial. De ahí que en trabajos muy recientes se considera el uso de cartas por atributos, en lugar de cartas para variables, para monitorear la media y la variación de un proceso (Ho y Costa (2016), Melo et al. 2017, Costa et al. 2017, Bezerra et al. 2018, Leoni y Costa, 2018).

Unos de los trabajos pioneros en el monitoreo multi-atributo es el propuesto por Lu et al. (1998), quienes desarrollaron una generalización de la carta np al caso multivariado, llamado gráfico mnp . En su trabajo definen el estadístico X como la suma ponderada de los conteos de unidades no conformes como procedimiento para interpretar las señales fuera de control. Realizan una generalización del estadístico X al caso en el que existe diferencia en el grado de severidad entre los atributos, penalizándolo en el cálculo del estadístico a través de un sistema de demérito. No discuten acerca de la distribución del estadístico X ni de la potencia de la carta.

Más tarde, Marcucci (1985) propone dos procedimientos para monitorear procesos, en los cuales los productos pueden clasificarse en categorías mutuamente excluyentes, en este caso clasificaciones trinomiales. El primero de ellos usa como estadístico de prueba el estadístico de bondad de ajuste χ^2 de Pearson. Supone conocidas las proporciones esperadas. En el segundo procedimiento las proporciones se suponen desconocidas y se utiliza una prueba de homogeneidad de proporciones entre el periodo base y cada periodo monitoreado. Por su parte, Taleb y Liman (2006) proponen dos GC para procesos multi-atributo, uno basada en teoría difusa y el otro basado en teoría de probabilidad. Este último muy parecido al propuesto por Marcucci (1985), considerando un estadístico de prueba de homogeneidad entre un periodo de base y cada periodo monitoreado. Adicionalmente, presentan un método para interpretar las señales fuera de control basado en la descomposición del estadístico en las contribuciones individuales de cada variable. En ambos trabajos, aproximan la distribución del estadístico a la distribución Ji-cuadrada, por lo que requieren que el tamaño de muestra sea grande, de tal forma que se justifique el uso de resultados asintóticos.

Cassady y Nachlas (2006) propusieron una carta de control univariado 3-niveles para procesos cuyos productos puedan clasificarse en tres categorías. En su trabajo definen funciones de valor de calidad mediante las cuales se asignan valores a cada categoría de clasificación. Definen el estadístico V , como el promedio de los productos del conteo de cada categoría y el valor de calidad respectivo. Sin embargo, solo es aplicable a procesos trinomiales.

Para monitorear procesos multivariados Poisson, Niaki y Abasi (2007b) proponen una generalización de la carta c al caso multivariado, emplean el método “Bootstrap” para calcular los límites de control. Chiu y Kuo (2008) proponen una metodología para construir una carta de control para monitorear procesos cuyas variables sigan marginalmente una distribución Poisson y estén correlacionadas. Extienden al caso multivariado la distribución del estadístico D (definido como la suma de los conteos de todas las no conformidades de cada característica de calidad). Estiman la media y la varianza del proceso utilizando una aproximación a la normal. Tal aproximación es buena cuando el valor del estadístico D es más grande que cinco. Es decir, es aplicable a procesos con una tasa de defectos alta.

Cozzucoli (2009) propone una generalización de la carta p al caso multivariado. En su trabajo define un índice de defectos globales ponderado, la carta propuesta es capaz de identificar mejora o deterioro del proceso. Supone tamaño de muestra constante y requiere tamaños de muestra grandes. En su trabajo, basado en el análisis de ARL, argumenta que la carta de control propuesta es más eficiente cuando se monitorea un proceso de muy alto nivel de calidad, especialmente, identificando mejora en el proceso.

Li y Tsung (2011) proponen dos cartas de control multi-atributo, una basada en la distribución Binomial y la otra en la Poisson, ambas bajo el enfoque de sumas acumuladas (CUSUM, del inglés Cumulative Sum) y la incorporación de una prueba de hipótesis múltiple conocida como control de tasa de descubrimiento falso (FDR, por sus siglas en inglés False Discovery Rate); esto para mejorar la potencia de las cartas. Cuando todas las hipótesis nulas son ciertas, controlar la FDR es equivalente a controlar la tasa de error tipo I. También, cuando algunas de las hipótesis alternas son ciertas, controlar la FDR puede proveer una potencia de detección más alta, especialmente cuando el número de hipótesis

realizadas es grande. Para emplear las cartas de control propuestas es necesario calcular primero el valor p de los estadísticos individuales de la Binomial/Poisson CUSUM, para obtener después la distribución teórica de los estadísticos. Así que se emplean métodos de aproximación, en particular, basados en teorías como cadenas de Markov y caminata aleatoria. Mediante un estudio simulado se comprobó que los métodos propuestos tienen mejor potencia que los clásicos.

Niaki y Nasaji (2011) diseñaron un método basado en redes neuronales para clasificar corrimientos en la media de procesos multi-atributo autorregresivos y determinar los atributos que causan, en algún momento, deterioro en la calidad. Se emplea un modelo de series de tiempo estacionarias para modelar un proceso auto-correlacionado. Mediante estudios de simulación, mostraron que el modelo propuesto tiene mejor desempeño que algunos métodos existentes como la carta mnp y una carta basada en una red neuronal conocida, en términos del ARL y del porcentaje de correcta clasificación. El método propuesto es capaz de diagnosticar los atributos que con mayor frecuencia provocan deterioro en la calidad del proceso.

Pandugaran y Varadharajan (2011) proponen una carta de control multinomial difusa bajo el enfoque adaptativo (tamaño de muestra variable). Se define una variable lingüística que se caracteriza mediante un conjunto de categorías mutuamente excluyentes, tal como, una variable multinomial. En este caso, se pondera cada categoría de manera que se refleje el grado de pertenencia en el conjunto. El tamaño de muestra se selecciona aleatoriamente de entre un conjunto de valores predeterminados. Se realiza una comparación del método propuesto y la carta p de tamaño de muestra variable. La carta multinomial difusa resultó más eficiente y sensible detectando causas especiales de variación. Sin embargo, tal comparación se hizo solo con base en un ejemplo simulado y no en base a medidas de desempeño como el ARL u otras.

Chia- Ding et al. (2012) proponen un método que combina el método de máxima verosimilitud y la carta p generalizada para variables multinomiales. El objetivo es estimar el instante de tiempo en el que inicia una perturbación de un proceso (punto de cambio). Cuando la carta da una señal fuera de control, se estima el punto de cambio mediante el

método de máxima verosimilitud; lo que facilita identificar la causa del problema. Se realiza una comparación entre el método combinado propuesto y la carta p generalizada sin modificación. Para ello se estudió, en un caso, el efecto del tamaño del cambio en el vector de proporciones multinomiales. En otro caso, se investigó el efecto del tamaño de muestra sobre el sesgo del estimador. Aunque en ambos casos el método propuesto resultó más eficiente estimando el punto de cambio (en términos del error estándar), en el primer caso no se indagó el desempeño del método para valores extremos en el vector de proporciones.

Más tarde, Haridy et al. (2013) presentan una nueva carta de control, llamada MSyn-np, resultante de la combinación de una carta para procesos multi-atributo propuesta por Jolayemi (1999) y una carta sintética que monitorea el número de muestras inspeccionadas entre dos muestras consecutivas no conformes (inclusive). Mediante un estudio comparativo, se demostró que la nueva carta es superior a sus cartas base individuales. Se evaluó la eficacia de las tres cartas en términos del Tiempo Promedio hasta una Señal (ATS, por sus siglas en inglés, Average Time to Signal) y del Número Promedio de Defectuosos producidos de casos fuera de control. Se obtuvieron diseños óptimos para algunos escenarios posibles. Por otra parte, el modelo se basa en la suposición de independencia de los atributos, lo que puede llevar a conclusiones erróneas cuando exista correlación entre ellos. Además, no se presenta ningún procedimiento para identificar el atributo que con mayor probabilidad contribuya a una señal cuando ésta se presente.

Jian Li et al. (2014) proponen una carta de control para datos categóricos multivariados multinomiales. Los datos se arreglan en tablas de contingencia multi-vía, de modo que se toma en cuenta la clasificación cruzada entre factores. Se utiliza un modelo log-lineal para caracterizar los patrones de asociación entre factores categóricos. La carta de control propuesta utiliza la función de log-verosimilitud de modelos log-lineales y el enfoque de Promedio Móvil Ponderado Exponencial (PMEP). Este trabajo es un método adecuado para cuando se tienen múltiples factores, ya que considera la clasificación cruzada entre los mismos. Esta característica hace que la carta de control propuesta sea sensible a corrimientos debidos a las interacciones entre factores. En el estudio simulado se analiza el desempeño de la carta para un tamaño de muestra de 1000 piezas, con la información que proporciona el estudio no es posible concluir acerca del desempeño de la

carta para muestras pequeñas. Este trabajo considera toda la información. El empleo de tablas de contingencia hace que este método sea más representativo de la realidad sin pérdida de información, lo que puede no ocurrir cuando se considera un modelo multinomial. Sin embargo, las pruebas realizadas consideran tamaños de muestra del orden de 1000 piezas, con los resultados presentados no es posible determinar si es eficiente para muestras mucho más reducidas.

Recientemente, Madadi y Mahmoudzadeh (2017) desarrollan una carta de control basada en la distribución multinomial y lógica difusa. La investigación se realiza en el marco de un proceso considerado como inusual; en el, la materia prima es clasificada en tres categorías de acuerdo a sus dimensiones. Se empleó el método Montecarlo para simular el proceso. Los límites de control se obtuvieron considerando normalidad; no se discutió sobre la potencia de la carta. Por otro lado, Wibawati et al. (2018) estudian el desempeño, en términos de ARL, de una carta multinomial difusa. Los resultados muestran que la carta es muy sensible a cambios pequeños y tiene una tasa baja de falsas alarmas. Sin embargo, no analizan el comportamiento de la carta en valores extremos del vector de proporciones.

Una contribución importante sobre el problema relacionado con las cartas de control multi-atributo para muestras pequeñas fue realizada por Mukhopadhyay (2008). La propuesta consiste en una carta de control D^2 , la cual utiliza una generalización de la distancia de Mahalanobis al caso multinomial, para el monitoreo de procesos cuyos productos pueden clasificarse en dos o más categorías de acuerdo a la presencia de un defecto. Las categorías deben ser mutuamente excluyentes, es decir, el producto puede pertenecer a una y solo una categoría. No aproximan la distribución del estadístico D^2 a la distribución Ji – cuadrada, sino a la distribución F , con lo que el autor argumenta que no es necesario garantizar un tamaño de muestra grande para su aplicación, resaltando la practicidad de uso.

Sin embargo, no discute acerca de la potencia del gráfico, así como el tamaño de muestra mínimo requerido para asegurar la eficiencia de la carta de control. Aunque la distribución D^2 puede aproximarse a una distribución F , tal aproximación es asintótica, lo cual evidencia la posibilidad de requerir un tamaño de muestra considerablemente grande.

De esta forma, si el tamaño de muestra no es suficiente, la eficiencia de la carta de control se afectaría seriamente.

Por lo tanto, es de interés la construcción de cartas de control multi-atributo que no consideren aproximaciones asintóticas en el cálculo de sus límites de control, para minimizar el efecto del tamaño de la muestra en la eficiencia del monitoreo del proceso.

Capítulo 4

Marco Teórico

En este capítulo se presentan algunos temas de interés relevante en esta investigación y se describen los métodos estadísticos necesarios para construir la carta de control propuesta y medir su desempeño. Asimismo, se presenta la carta D^2 empírica, la cual se desarrolló en cumplimiento con el *objetivo general* de esta tesis.

4.1 Gráficos de Control

Una carta de control es una representación gráfica de las mediciones, a lo largo del tiempo, de una o varias características de calidad del proceso bajo investigación. Es la herramienta más usada y poderosa para identificar causas de variabilidad de un proceso (Montgomery y Runger, 2007).

Cierta variabilidad es inducida al proceso a través de la materia prima que varía de lote en lote, el personal que es diferente en cada turno de producción, la maquinaria y herramientas que se desgastan a lo largo del tiempo. Este tipo de variabilidad recibe el nombre de variabilidad debida a causas comunes o aleatorias, ya que no es posible atribuirle a una causa específica. Se dice que un proceso está dentro de control cuando presenta únicamente este tipo de variabilidad.

Sin embargo, conforme el tiempo transcurre pueden presentarse fallas en el proceso, que eventualmente pueden ocasionar defectos en los productos. Estas fallas pueden deberse a condiciones no usuales en los dispositivos e insumos del proceso y reciben el nombre de causas especiales de variación.

Uno de los objetivos principales de las cartas de control de procesos es la detección rápida de causas especiales de variación, de manera que puedan corregirse oportunamente a fin de evitar afectaciones en la calidad del producto.

Una carta de control consta de una línea central que representa el valor promedio de la característica de calidad correspondiente al estado bajo control. Y dos líneas que representan los límites de control inferior y superior.

Generalmente, la implementación de una carta de control se lleva en dos fases:

Con base en información histórica representativa del proceso bajo control, llamada una base histórica de datos (BHD), en la *Fase I*, se ajusta una distribución de probabilidad, digamos F_0 . En seguida se calculan los parámetros asociados a localización y a la dispersión de la distribución. El primer valor fija una línea central en la carta de control. Ambos valores se utilizan para calcular los límites de control.

En trabajos recientes, la obtención de los límites de control se realiza mediante optimización, es decir, no se estiman a partir de información proveniente del proceso. Se busca mejorar el desempeño de la carta bajo algunos enfoques, como minimizar la longitud promedio de corrida fuera de control, el tiempo promedio hasta una señal fuera de control o reducir el costo esperado de utilizar la carta. Esto permite lograr ciertas características deseadas en las cartas de control.

En la *Fase II*, se toman muestras sucesivas en instantes a lo largo del tiempo, generalmente equiespaciadas, digamos t_1, t_2, \dots, t_k , estas muestras siguen distribuciones de probabilidad F_1, F_2, \dots, F_k , y se pretende contrastar las hipótesis:

$$H_0: F_1 = F_2 = \dots = F_k = F_0$$

$$H_1: F_s \neq F_0 \text{ para alguna } s, s = 1, 2, \dots, k.$$

Los valores del estadístico de prueba son los puntos que se grafican en la carta de control. Un punto fuera de los límites de control puede indicar un cambio en la distribución de los datos y es razonable pensar que el proceso se salió de control estadístico, entonces debe investigarse la causa que lo provocó y tomar las medidas pertinentes para regresar el

proceso al estado dentro de control. Un punto graficado fuera de los límites de control es llamado una *señal fuera de control*.

Como en cualquier prueba de hipótesis, al emplear una carta de control se pueden cometer los errores Tipo I y Tipo II.

Error Tipo I: Rechazar la hipótesis nula siendo cierta.

Error tipo II: Aceptar la hipótesis nula siendo falsa.

Cometer el Error Tipo I es equivalente a tener una señal fuera de control falsa, es decir, concluir que el proceso está fuera de control cuando no lo está. Si la tasa de falsas alarmas de una carta de control es alta, puede ocasionar un sobre ajuste del proceso.

Por otra parte, cometer el Error Tipo II implica concluir que el proceso está en control cuando no lo está. Esto, eventualmente, puede ocasionar que piezas malas se tomen como buenas y sean enviadas al cliente.

Las cartas de control se clasifican en dos tipos, de acuerdo al tipo de variable a monitorear:

Cartas de control por variables: Son usadas cuando la característica de calidad de interés puede expresarse en una escala continua de medición, por ejemplo, el diámetro de un objeto.

Cartas de control por atributos: Son útiles cuando la característica de calidad es un atributo cualitativo y no puede usarse una escala de medición continua, en su lugar se utiliza una escala nominal u ordinal. Un ejemplo de escala ordinal es una unidad que se clasifica como buena, regular y mala, esta clasificación depende del criterio del personal de inspección.

4.2 Gráficos de control para atributos

Para medir la calidad es necesario considerar especificaciones cuantitativas y cualitativas. Por ejemplo, longitud, diámetro, espesor, dureza, son características cuantitativas (son variables continuas) las cuales se representan en una escala continua de medición; las

unidades de medida suelen ser metros, centímetros, etc. Especificaciones cualitativas o atributos (variables discretas) son por ejemplo, acabado, color, rayas o manchas. La presencia de alguna de ellas puede representar un defecto en la pieza y generar re-trabajo o desperdicio. Generalmente se realiza una clasificación de las piezas de acuerdo a la presencia o ausencia de defectos, o bien, se hace un conteo del número de los defectos que presenta una pieza.

Las cartas de control para atributos son adecuadas para monitorear procesos con especificaciones cualitativas, o en situaciones donde las características de calidad son variables continuas tratadas como atributos, por ejemplo, el diámetro de un objeto del que interesa si pasa o no pasa por un dispositivo sin importar el valor de medición.

Las cartas de control para atributos clásicas son la carta p y np , para procesos en los que el producto puede clasificarse como bueno o malo, y la carta c y u útiles para cuando es de interés monitorear el número de defectos que presenta una unidad o producto.

Algunas limitaciones de este tipo de cartas de control son las siguientes:

- Se requiere de muestras de tamaño grande para no afectar la eficiencia de la carta.
- Son mayormente aplicables en procesos cuya tasa de productos defectuosos es considerablemente alta.
- Un problema de calidad se detecta hasta que los defectos se presentan. No así en cartas de control para variables, en las que puede evitarse que los defectos se registren gracias a que pueden observarse tendencias en el comportamiento del proceso.
- Clasificar un artículo como bueno o malo requiere el criterio del personal de inspección, por lo que es necesario el uso de ayudas visuales y capacitación para hacer lo más homogénea y precisa posible la toma de decisiones.

Algunas ventajas de usar las cartas de control por atributos son las siguientes:

- Generalmente, la inspección y recolección de información es rápida y poco costosa, excepto cuando se requieren equipos especiales para realizar la inspección, por ejemplo, cuando el defecto es a simple vista imperceptible.
- Se pueden aplicar a cualquier tipo de característica.

- Permiten detectar cuando causas especiales de variación se presentan en el proceso.

En las siguientes secciones se presentan las cartas de control para atributos clásicas; la carta p y np para procesos en los que el producto puede clasificarse como bueno o malo, y la carta c y u útiles para cuando es de interés monitorear el número de defectos que presenta un producto.

4.2.1 El gráfico p

El gráfico de control p es adecuado para monitorear la proporción o fracción de unidades defectuosas en muestras de tamaño variable tomadas del proceso a intervalos fijos de tiempo.

Sean X_1, X_2, \dots, X_k las muestras de tamaño n_i tomadas del proceso en el tiempo $i = 1, 2, \dots, k$, y Y_1, Y_2, \dots, Y_k , el número de unidades defectuosas en la i -ésima muestra. Tenemos que Y_i se distribuye binomialmente con parámetros n_i y p .

Para cada muestra se define la variable aleatoria \hat{p}_i , (la fracción de unidades defectuosas) como:

$$\hat{p}_i = \frac{Y_i}{n_i} \quad (4.1)$$

La media y la desviación estándar de \hat{p}_i es:

$$E(\hat{p}_i) = \frac{E(Y_i)}{n_i} = \frac{n_i p}{n_i} = p, \quad (4.2)$$

$$V(\hat{p}_i) = \frac{V(Y_i)}{n_i^2} = \frac{p(1-p)}{n_i} \quad (4.3)$$

Existe una aproximación a la normal, con fundamento en el Teorema de Límite Central, así:

$$\hat{p}_i \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}\right), \text{ si } n_i \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

Con el uso de tal aproximación se derivan los límites de control, y quedan como:

$$\begin{aligned}
 LCS &= p + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}} \\
 LC &= p \\
 LCI &= p - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i}}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Donde α es la probabilidad de detectar una salida de control cuando el proceso está bajo control (probabilidad de cometer el error Tipo I).

Si p es desconocida, se puede estimar una primera fase con datos del proceso cuando se considera en control:

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{p}_i
 \tag{4.6}$$

4.2.2 El gráfico np

Supongamos que en un proceso se requiere monitorear el número de piezas no conformes por muestra o subgrupo y que además es posible mantener el tamaño de muestra constante a través del tiempo. Entonces, se tiene una variable Binomial con parámetro n y p ; donde n es el tamaño de la muestra, en este caso es constante y p es la proporción de piezas defectuosas en la muestra.

El gráfico de control recomendado en este tipo de situaciones es el **gráfico np** .

Este gráfico se basa también en la distribución Binomial. Así que es posible se retomen algunas definiciones y fórmulas.

Se sabe que

$$\mu = E(Y) = np \quad y \quad \sigma^2 = V(Y) = npq, \quad q = 1 - p.$$

Sean X_1, X_2, \dots, X_k un conjunto de muestras extraídas en el intervalo de muestreo $i = 1, 2, \dots, k$ de un proceso, denote con n_i el tamaño de muestra, y sean Y_1, Y_2, \dots, Y_k , el número de unidades defectuosas en la i -ésima muestra. Entonces, Y_i se distribuye binomialmente con parámetros n y p .

Para cada muestra, se define la variable aleatoria “proporción de defectuosos muestrales” como en la expresión (4.7).

$$\hat{p}_i = \frac{Y_i}{n} \quad (4.7)$$

La media y la desviación estándar de \hat{p}_i es:

$$E(\hat{p}_i) = \frac{E(Y_i)}{n} = \frac{np}{n} = p \quad (4.8)$$

$$V(\hat{p}_i) = \frac{V(Y_i)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \quad (4.9)$$

Existe una aproximación a la normal, con fundamento en el Teorema de Límite Central, así:

$$\hat{p}_i \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right), \text{ si } n \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

Con el uso de tal aproximación se derivan los límites de control, y quedan como:

$$\begin{aligned} LCS &= np + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np(1-p)} \\ LC &= np \\ LCI &= np - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si p es desconocida, se puede estimar una primera fase con datos del proceso cuando se considera en control.

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{p}_i \quad (4.12)$$

4.2.3 El gráfico *c*

El gráfico *C* se utiliza cuando es necesario monitorear el número de defectos en una unidad de producto. Por ejemplo, el número de defectos en las hélices de un motor o el número de componentes faltantes en un celular. Este tipo de situaciones de defectos por unidad o pieza pueden modelarse adecuadamente con la distribución Poisson. Para este gráfico, las muestras deben ser de tamaño constante y deben ser tomadas a intervalos iguales de tiempo.

Sea *C* el número total de defectos en una muestra de unidades, donde *C* es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ . La media y la varianza de esta distribución son iguales con λ , y si se conoce su valor, la línea central para la carta *C* se grafica en λ . Los límites superior e inferior se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} LSC &= \lambda + 3\sqrt{\lambda} \\ LC &= \lambda \\ LSC &= \lambda + 3\sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sin embargo, en la práctica es común que no se conozca λ , entonces debe estimarse a partir de información preliminar del proceso. Supóngase que se tienen *m* muestras preliminares, y sea *C_i* el número de defectos en la *i*-ésima muestra. El tamaño muestral puede ser *n* = 1. Entonces, un estimador razonable de λ es

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m C_i \quad (4.14)$$

Los parámetros de la carta *C* quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\
LC &= \bar{c} \\
LSC &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

donde \bar{c} es el valor observado del número promedio de defectos en una muestra.

4.2.4 El gráfico u

Esta carta de control se utiliza para monitorear el número promedio de defectos por unidad. Puede emplearse tanto con muestras de tamaño constante como variable. Sin embargo, es común su uso cuando el tamaño de muestra no es constante.

Sea c_i , el número total de defectos en la i -ésima muestra de tamaño n_i , el número promedio de defectos por unidad puede calcularse de la siguiente forma:

$$u_i = \frac{c_i}{n_i} \tag{4.16}$$

La variable c_i es una variable Poisson de parámetro $\lambda = n_i u$, donde u es el número promedio de defectos por unidad.

Para construir la carta U, es necesario definir los parámetros de la misma. Si se tienen m muestras preliminares y u_1, u_2, \dots, u_m es el número de defectos por unidad en cada muestra, entonces el estimador del número promedio por unidad es

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i \tag{4.17}$$

Los límites de la carta U se definen como,

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \\
LC &= \bar{u} \\
LSC &= \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

donde \bar{u} es el número promedio de defectos por unidad.

4.3 Gráficos de control multi-atributo

En las últimas décadas el control multivariado de procesos ha tenido una creciente atención y su uso se ha popularizado en la industria, por ejemplo en el manual AIAG (2005) de la industria automotriz se sugiere el uso de cartas de control multivariado cuando se monitorean simultáneamente dos o más características de control relacionadas.

En ese mismo documento se resalta como ventaja del control multivariado la combinación de los efectos de varias características de calidad en un solo estadístico y por tanto el uso de una sola carta para monitorear varias variables, y como desventaja la complejidad matemática y computacional.

Aunque en dicho manual no se mencionan técnicas de control multivariado para atributos (gráficos para procesos multi-atributo) son importantes en la práctica, ya que no todas las variables de calidad son continuas. Adicionalmente, el uso de dispositivos conocidos como “pasa - no pasa” que en la industria reemplazan a algunas mediciones instrumentales, da lugar a nuevas variables cualitativas.

Cuando en un proceso se presenta más de un defecto, es común que se considere cada defecto como una categoría y se clasifique cada pieza según el defecto que presente. En otras situaciones, se consideran los conteos de distintos tipos de defectos que puede presentar una muestra, en ambos casos se llaman genéricamente como procesos multi-atributo. Entonces, resulta adecuado emplear cartas de control multi-atributo para monitorear la calidad de los procesos en cuestión.

Esta investigación se enfoca en procesos donde los defectos son considerados como categorías, cada pieza se clasifica según el defecto que presente. Si se presentan dos o más defectos en la misma unidad, se considera el defecto más grave o predominante de acuerdo a los criterios internos del proceso. De modo que, las categorías son mutuamente excluyentes, dando lugar a variables que pueden modelarse adecuadamente con una distribución multinomial.

Distribución multinomial Sean c y n enteros positivos y sea p_1, \dots, p_c números que satisfacen $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 1, \dots, c$, y $\sum_{i=1}^c p_i = 1$. Entonces el vector aleatorio (x_1, \dots, x_c) tiene una distribución multinomial con n ensayos y probabilidades p_1, \dots, p_c si la distribución de probabilidad conjunta de (x_1, \dots, x_c) es

$$f(x_1, \dots, x_c) = \frac{n!}{x_1! \cdot \dots \cdot x_c!} p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_c^{x_c} = n! \prod_{i=1}^c \frac{p_i^{x_i}}{x_i!} \quad (4.19)$$

El vector (x_1, \dots, x_c) es tal que cada x_i es un entero positivo y $\sum_{i=1}^c x_i = n$.

La distribución multinomial es un modelo adecuado cuando se tienen condiciones similares al siguiente experimento. El experimento consiste de n ensayos independientes. Cada ensayo resulta en una de c posibles salidas. La probabilidad de la i – *ésima* salida es p_i en cada ensayo y x_i es el conteo del número de veces que ocurre la i – *ésima* salida en los m ensayos (Casella y Berger, 2002).

Cuando se emplea una carta de control para monitorear un proceso se tienen n ensayos independientes llamados muestras. Si se trata de un proceso multi-atributo en el que se clasifica una pieza según el defecto que presente, suponga que pueden ocurrir c diferentes defectos, entonces se tienen c salidas. Es posible contar x_i , el número de veces que ocurre el i – *ésimo* defecto (o salida) en una muestra de n ensayos. Siempre es posible calcular $p_i = x_i/n$, es fácil ver que $\sum_{i=1}^c p_i = 1$, así que siempre es posible asignar una medida de probabilidad, p_i , la cual representa la probabilidad de que ocurra el i – *ésimo* defecto. Usualmente p_i se estima en una fase previa al monitoreo del proceso, a partir de una base histórica de datos que represente el estado deseado del proceso.

Una vez que se ha efectuado la Fase I de la implementación de una carta de control, que, entre otras cosas, implica establecer el vector de probabilidades que representa el estado deseado del proceso, digamos \bar{p} , ya sea mediante estimación o de forma arbitraria, es necesario pasar a la Fase II: el control.

Para llevar a cabo la Fase II es necesario arrancar el proceso en el estado deseado, y vigilar que se mantenga en ese estado a lo largo del tiempo. Esto es, el vector de

probabilidades p del proceso es igual al vector de probabilidades deseado \bar{p} . Entonces, debe establecerse una forma adecuada de medir la diferencia entre p y \bar{p} en diferentes instantes de tiempo, para contrastar la hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0: p_i &= \bar{p} \\ H_1: p_i &\neq \bar{p} \text{ para alguna } i, i = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.20}$$

Con este propósito se emplean estadísticos de prueba conocidos como el de bondad de ajuste de Pearson (Marcucci, 1985) o una prueba de homogeneidad entre un periodo de base y uno observado (Taleb et al. 2006). Lu et al. (1998), por ejemplo, construyen un estadístico a partir de la suma ponderada de los conteos de piezas defectuosas. Por su parte, Mukhopadhyay (2008) emplea un estadístico basado en la distancia de Mahalanobis. Este último es de interés en esta investigación y se describe a continuación.

4.4 Carta D^2 de Mahalanobis para procesos multinomiales

La carta D^2 se basa en la distancia de Mahalanobis y en la distribución multinomial, fue propuesta por Mukkhpadyyay (2008) para monitorear procesos multinomiales. El estadístico se presenta en el siguiente contexto.

Suponga que se desea monitorear un proceso donde cada unidad producida puede clasificarse en $C - 1$ categorías de defectos y una categoría de no defectos, es decir, C categorías en total, mutuamente excluyentes y exhaustivas. Entonces, como ya se dijo, la calidad del proceso puede especificarse en términos de la distribución multinomial con parámetros n y \bar{p} . De manera que, un mayor número de piezas en las categorías de no conformes indican una calidad pobre en el proceso, y viceversa, un mayor número de piezas en la categoría de conformes indica un mejor nivel de calidad en el proceso. Si se expresa en términos de la distancia de Mahalanobis, la distancia entre el i –ésimo vector observado y el vector objetivo (\bar{p}) debe ser cercana a cero, de otro modo, la distancia debe ser cercana al límite de control, respectivamente.

El estadístico D_j^2 expresado en (4.21) es una distancia de Mahalanobis generalizada al caso multinomial.

$$D_i^2 = (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})^T \Sigma_i^{-1} (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^k \frac{N_i (p_{ij} - \bar{p}_j)^2}{\bar{p}_j} \quad (4.21)$$

Donde D_i^2 es la distancia observada entre \bar{p}_j , el vector de proporciones observadas y $\bar{\mathbf{p}}$, el vector objetivo. Σ_i es la matriz de varianzas y covarianzas del vector \mathbf{p}_i y es igual a $N_i^{-1} \Sigma$ y $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, $\sigma_{ij} = \begin{cases} \bar{p}_i(1 - \bar{p}_i) & \text{for } i = j \\ -\bar{p}_i \bar{p}_j & \text{for } i \neq j \end{cases}$. La cantidad p_{jk} es la proporción observada en el j -ésimo intervalo de muestreo de la categoría k , y \bar{p}_k es la proporción objetivo de la categoría k , $j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, C$ y $\sum_{k=1}^C p_{jk} = 1$.

El límite superior de control, LSC_i , para D_i^2 se calcula con la Ecuación (4.22).

$$LSC_i = \left[\frac{(N_i(K-1))}{(N_i - K + 2)} \right] F_{K-1, N_i - K + 2, \alpha} \quad (4.22)$$

Donde la cantidad $F_{K-1, N_i - K + 2, \alpha}$ es el cuantil α de la distribución F con $(K-1)$ y $N_i - K + 2$ grados de libertad (para más detalles vea Mukhopadhyay, 2008).

4.5 Medidas de desempeño

Una carta de control estadístico es básicamente una secuencia de pruebas de hipótesis. En esta sección se abordará la definición general de una prueba de hipótesis y de cómo se mide la eficiencia de la misma.

4.5.1 Pruebas de hipótesis

Una prueba de hipótesis es útil para decidir con información muestral si un parámetro θ se encuentra en un subespacio específico, digamos ω , del espacio de parámetros Ω . Por ejemplo, ω puede contener subconjuntos de valores para los cuales la media es 0 y la desviación estándar es 1, entonces extrayendo una muestra de ω es posible probar si $\theta = \theta_0$ pertenece a ω .

De forma general se quiere probar que $H_0: \theta \in \omega$, llamada “la hipótesis nula” y la hipótesis alterna $H_1: \theta \in \Omega - \omega$. Una prueba de hipótesis puede verse como una regla para decidir si se rechaza H_0 (y se acepta H_1) o si se acepta H_0 (y se rechaza H_1).

El espacio muestral se particiona en dos conjuntos R y A; R es de rechazo y A de aceptación. Si una observación "y" se encuentra en R, se rechaza H_0 (se acepta H_1), sin embargo si "y" se encuentra en A se acepta H_0 (se rechaza H_1).

Es posible cometer dos tipos de error:

1. Error tipo I: θ se encuentra en ω pero y cae en R, eso lleva a rechazar H_0 cuando es de hecho cierta.
2. Error tipo II: θ se encuentra en $\Omega - \omega$ pero y cae en A, eso lleva a aceptar H_0 cuando es de hecho falsa.

Podría ser de interés hacer una partición en el espacio muestral en R y A de tal forma que la probabilidad de cometer los dos tipos de error sea muy pequeña. Pero esto generalmente no es posible para un tamaño de muestra fijo n (Graybill, 1976). Así que el procedimiento convencional es especificar que la probabilidad máxima de un error tipo I sea α , y entonces encontrar un R que minimice la probabilidad de cometer un error tipo II.

Una vez especificado α , conocido como nivel de significancia, entonces la probabilidad de cometer el error tipo I se restringe a ser menor o igual a α . Usualmente α es pequeño, por ejemplo, 0.001, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1.

En el contexto de las cartas de control, la prueba de hipótesis es una regla para decidir si el proceso está bajo control estadístico o no. La prueba se lleva a cabo de la siguiente forma, en un instante se toma una muestra del proceso, se supone que esta muestra sigue una distribución F , y se quiere probar con base en la información muestral que $H_0: F = F_0$ vs $H_1: F \neq F_0$. Si se acepta H_0 se dice que el proceso está bajo control estadístico y si se rechaza se dice que el proceso está fuera de control estadístico. En este caso, los errores se interpretan de la siguiente manera.

1. Error tipo I: θ se encuentra en ω pero y cae en R, es decir, el proceso está dentro de control estadístico ($H_0: F = F_0$) pero la muestra apoya lo contrario ($H_1: F \neq F_0$), eso lleva a rechazar H_0 cuando es de hecho cierta, de forma que el proceso se declara fuera de control cuando de hecho está dentro.

2. Error tipo II: θ se encuentra en $\Omega - \omega$ pero y cae en A , es decir, el proceso está fuera de control estadístico ($H_1: F \neq F_0$) pero la muestra apoya lo contrario ($H_0: F = F_0$), eso lleva a aceptar H_0 cuando es de hecho falsa, de forma que el proceso se declara dentro de control cuando de hecho está fuera.

4.5.2 Potencia de una prueba

La potencia de una prueba es una medida de lo “buena” que es la prueba (Graybill, 1976). De esta forma podemos decidir si una prueba es mejor que otra. La potencia de una prueba T , denotada por $\Pi_T(\theta)$, se define como la probabilidad de rechazar H_0 como una función de θ . Así, cuando θ se encuentre en ω (y entonces H_0 es cierta) se desea que $\Pi_T(\theta)$ sea pequeña y cuando θ se encuentre en $\Omega - \omega$ (y entonces H_0 es falsa) se desea que $\Pi_T(\theta)$ sea grande.

Como se vio anteriormente, se fija que la probabilidad de cometer el error tipo I a ser menor o igual a α , siendo así, vemos que $\Pi_T(\theta) \leq \alpha$ para θ en ω . El “tamaño de la prueba” se define como el $\max_{\theta \in \omega} \Pi_T(\theta)$, es decir, el valor máximo de potencia siendo que θ se encuentra en ω .

Hay ciertas propiedades deseables en una prueba. Por ejemplo, que cumpla con los requisitos para considerarse una prueba uniformemente más poderosa (UMP). Esto es, una prueba T de $H_0: \theta \in \omega$ vs $H_1: \Omega - \omega$ se define como una prueba UMP de tamaño α si y solo sí para cualquier otra prueba T^* de H_0 vs H_1 de tamaño $\leq \alpha$, la potencia de T es tan grande o más grande que la potencia de T^* , es decir:

- (1) $\max_{\theta \in \omega} \Pi_T(\theta) = \alpha$
- (2) $\Pi_{T^*}(\theta) \leq \Pi_T(\theta)$ para toda θ en ω , donde T^* es cualquier prueba

Satisfacer para ser una UMP se considera una propiedad óptima de las pruebas. Sin embargo, muy pocas veces las pruebas tienen esta propiedad (Graybill, 1976). Lo que se hace es restringir las pruebas a una clase específica y encontrar una UMP (si existe) dentro de esta clase. Por ejemplo, la propiedad de prueba insesgada.

Para definir una prueba insesgada considere pruebas de H_0 vs H_1 de tamaño α . Una prueba T se define a ser una prueba insesgada de tamaño α si y solo si satisface

- (1) Tiene tamaño α
- (2) $\Pi_T(\theta) \geq \Pi_{T^*}(\theta)$ para todo θ en $\Omega - \omega$, es decir, la potencia de T es mayor o igual a las potencia de T* siendo que H_0 es falsa.

La potencia de una carta de control puede obtenerse si se conoce su función, o bien, puede estimarse mediante simulación empleando la longitud promedio de corrida (ARL).

4.5.3 Longitud promedio de corrida

La longitud promedio de corrida (ARL, por sus siglas en inglés, Average Run Length) se usa para medir la rapidez con la que una carta de control detecta un cambio o una perturbación del proceso que afecta la calidad del producto. El ARL se define como el número promedio de muestras que se requieren para que la carta de una señal fuera de control.

Generalmente, el proceso inicia en control y en algún momento futuro una causa asignable se presenta provocando un cambio en la calidad del producto. Al ser básicamente una prueba de hipótesis, es deseable que la carta sea insesgada. Esto es, cuando el proceso está en control, es deseable que el promedio de muestras tomadas desde el comienzo del monitoreo hasta una señal fuera de control sea grande; de manera que sean pocas falsas alarmas. Este número promedio se denota por ARL_0 y se expresa como:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (4.22)$$

donde α es la probabilidad de cometer el Error Tipo I.

Por otro lado, cuando el proceso está fuera de control, el número promedio de muestras tomadas hasta una señal fuera de control debe ser pequeño de manera que la detección del corrimiento en el proceso sea rápida. Este número promedio se denota por ARL_1 y se calcula con la Ecuación (4.23).

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (4.23)$$

Donde β es la probabilidad de cometer el Error Tipo II.

Si las observaciones graficadas en la carta de control son independientes, entonces el número de puntos graficados hasta que un punto excede un límite de control, es una variable aleatoria geométrica como parámetro p . La media de la distribución geométrica es $1/p$.

Note que el ARL está en función de la potencia, así que si se conoce la función de potencia de la carta, puede calcularse el valor esperado del ARL. Además, si no se conociera la función de potencia, el ARL puede calcularse mediante simulación.

4.6. Pruebas de bondad de ajuste: Kolmogorov-Smirnov

Considere la situación donde Y_1, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes y quiere probarse la hipótesis nula H_0 de que tienen una función de distribución común F , donde F es una función de distribución continua.

Una forma de probar que Y_j proviene de una distribución continua F es como sigue:

Sea F_e la distribución empírica definida por:

$$F_e(x) = \frac{\#i: Y_i \leq x}{n} \quad (4.24)$$

Esto es, $F_e(x)$ es la proporción observada de valores que son menores que o iguales a x . Ya que $F_e(x)$ es un estimador natural de la probabilidad de que una observación sea menor que o igual que x , se sigue que, si la hipótesis nula de que F es la distribución en cuestión es correcta, debería ser cercana a $F(x)$. Ya que esto es así para toda x , una cantidad natural sobre la cual basar una prueba de H_0 es el estadístico de prueba:

$$D \equiv \max_x |F_e(x) - F(x)| \quad (4.25)$$

Donde x va desde $-\infty$ a $+\infty$. La cantidad D es llamada estadístico de prueba Kormogorov-Smirnov.

Para calcular el valor de D para un conjunto de datos dado $Y_j = y_j, j = 1, \dots, n$, tome $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}$ los cuales denotan los valores de y_j en orden creciente. Esto es,

$$y_{(j)} = j - \text{ésimo menor de } y_1, \dots, y_n \quad (4.26)$$

Ya que $F_e(x)$ puede escribirse como:

$$F_e(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < y_{(1)} \\ \frac{1}{n}, & \text{si } y_{(1)} \leq x \leq y_{(2)} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}, & \text{si } y_{(j)} \leq x \leq y_{(j+1)} \\ \vdots \\ 1, & \text{si } y_{(n)} \leq x \end{cases} \quad (4.27)$$

Puede verse que $F_e(x)$ es constante dentro de los intervalos $(y_{(j-1)}, y_{(j)})$ e incrementa en $1/n$ en los puntos $y_{(1)}, \dots, y_{(n)}$. Y dado que $F_e(x)$ es una función de x creciente y acotada por 1, entonces el valor máximo de $F_e(x) - F(x)$ es no negativo y ocurre en uno de los puntos $y_{(j)}, j = 1, \dots, n$. Esto es

$$\max_x \{F_e(x) - F(x)\} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{j}{n} - F(y_{(j)}) \right\} \quad (4.28)$$

De manera similar, el valor máximo de $F(x) - F_e(x)$ es también no negativo y ocurre inmediatamente antes de un punto de salto $y_{(j)}$, así,

$$\max_x \{F(x) - F_e(x)\} = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ F(y_{(j)}) - \frac{(j-1)}{n} \right\} \quad (4.29)$$

A partir de las ecuaciones (4.28) y (4.29) puede verse que:

$$\begin{aligned} D &= \max_x |F_e(x) - F(x)| \\ &= \max\{\max\{F_e(x) - F(x)\}, \max\{F(x) - F_e(x)\}\} \\ &= \max \left\{ \frac{j}{n} - F(y_{(j)}), F(y_{(j)}) - \frac{(j-1)}{n}; j = 1, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

La Ecuación (4.30) puede usarse para calcular el valor de D .

Ahora suponga que se observa Y_j y sus valores son tales que $D = d$. Ya que un valor grande de D podría parecer inconsistente con la hipótesis nula de que F es la distribución en cuestión, entonces el *valor - p* para este conjunto de datos es dado por:

$$\text{valor} - p = P_F\{D \geq d\} \quad (4.31)$$

Se escribe P_F para hacer indicar que esta probabilidad debe ser calculada bajo la suposición de que la H_0 es correcta.

El *valor - p* puede aproximarse mediante simulación, la cual es más fácil de hacer mediante la siguiente proposición: Se puede demostrar que $P_F\{D \geq d\}$ no depende de la distribución F . Este resultado permite estimar el *valor - p* haciendo la simulación con cualquier distribución. Una elección común es emplear la distribución Uniforme para aproximar el *valor - p* (Ross, 2013).

4.7 Método Monte Carlo

Los métodos Monte Carlo son una rama de las matemáticas experimentales, la cual se ocupa de ensayos sobre números aleatorios. Los problemas que pueden abordarse con estos métodos son llamados probabilísticos o determinísticos, de acuerdo a si están relacionados o no con el comportamiento de procesos aleatorios.

En el caso de un problema probabilístico, el enfoque Monte Carlo más simple consiste en observar números aleatorios, elegidos de tal forma que simulen directamente el proceso físico aleatorio del problema original e inferir la solución deseada a partir del desempeño de tales números aleatorios.

Por otra parte, los problemas determinísticos están relacionados con las matemáticas teóricas. Una de las principales fortalezas de esta disciplina es la atención en la abstracción y la generalización. Es posible escribir expresiones simbólicas o ecuaciones formales un problema con el fin de abstraer su esencia y revelar su estructura. Sin embargo, entre más general y formal es el lenguaje empleado en dicha tarea, menos es la teoría disponible para proporcionar una solución numérica en una aplicación (Hammerley y Handscomb, 1964).

El enfoque Monte Carlo en los problemas determinísticos consiste en reemplazar la teoría por experimentos, siempre que sea necesario.

Un problema común es encontrar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es una función general de otras conocidas, como es el caso de esta investigación. El método Monte Carlo es útil, en este caso para seleccionar muestras aleatorias de una población (finita o infinita) de la que se conoce su distribución de probabilidad mediante números aleatorios. Se le llama *números aleatorios* a un conjunto de números que fueron seleccionados considerando que todos sus dígitos tienen la misma probabilidad de ocurrencia (Peña, 2001).

Así por ejemplo, suponga que tiene números de dos dígitos, los cuales se convierten en decimales de manera que $0 \leq \text{Número aleatorio} < 1$. Si se trata de una variable discreta, se debe establecer una tabla de correspondencia partiendo el intervalo en otros más pequeños de acuerdo a la distribución de probabilidad $F(x)$ y a los valores que puede tomar la variable aleatoria (por ejemplo, si el número aleatorio es 0.52, diremos que se observó $x = 2$) y se tomarán tantos números aleatorios como elementos deba contener la muestra.

Este procedimiento puede generalizarse para distribuciones continuas como sigue:

- 1) Tomar un número aleatorio de tantas cifras como se desee, a mayor cantidad más precisión, y convertirlo en decimal (ejemplo, 23.457 se convierte en 0.23457). Denotemos con na tal valor.
- 2) Considere el valor na como un valor de $F(x)$ y tomar como un valor observado en la muestra aquel valor x tal que $na = F(x)$; $x = F^{-1}(na)$, $F^{-1}(\cdot)$ es la función de distribución inversa.
- 3) Generar una muestra de tamaño n , repitiendo los pasos anteriores n veces con distintos números aleatorios.

4.8 Carta de control D^2 empírica

En esta sección se describe la carta D^2 empírica propuesta. La construcción consiste en combinar el estadístico D^2 presentado por Mukkhopadyhay (2008) y el uso de la distribución empírica para determinar su límite de control.

La utilización de un límite de control empírico en lugar del teórico, tiene como finalidad mejorar la eficiencia de la carta de control D^2 para muestras pequeñas, ya que como se muestra en el anexo A1, el supuesto distribucional en el que se basa su límite teórico no se cumplen cuando el tamaño de muestra es menor a 500. A continuación se presenta el gráfico propuesto.

4.8.1 Descripción de la carta D^2 empírica

Suponga que se desea monitorear un proceso donde cada unidad producida puede clasificarse en $K - 1$ categorías de defectos y una categoría de no defectos, es decir, K categorías en total, mutuamente excluyentes y exhaustivas. De ser así, la calidad del proceso puede especificarse en términos de la distribución multinomial con parámetros n y \bar{p} . De manera que un mayor número de piezas en las categorías de no conformes indican una calidad pobre, y viceversa, un mayor número de piezas en la categoría de conformes indica un mejor nivel de calidad en el proceso. Si esto se expresa en términos de la distancia de Mahalanobis, la distancia calculada deberá ser cercana a cero, de otro modo, la distancia deberá ser cercana al límite de control, respectivamente

En este caso, la variable aleatoria que se monitorea es el número de unidades que son clasificadas en K categorías en una muestra de tamaño n . El vector de proporciones \vec{p} , se obtiene dividiendo el número de unidades que son clasificadas por categoría, entre el tamaño de muestra. El valor objetivo de \vec{p} se representa con \bar{p} ; esto es, cuando el proceso está *dentro de control* $\vec{p} = \bar{p}$. El vector objetivo puede estimarse a partir de una base histórica de datos o especificarse en términos de los estándares de calidad del proceso.

Como todos los gráficos de monitoreo, el propósito de éste es detectar de forma eficiente las causas asignables de variación, lo que representa un proceso *fuera de control*, es decir aquellas que resulten en un cambio significativo en el vector de proporciones \vec{p} (note que $\vec{p} \neq \bar{p}$). Cuando se utiliza el gráfico de control D^2 empírico, la variación del proceso se mide mediante el estadístico D^2 calculado con la Ecuación (4.32). Donde, D^2 es una distancia de Mahalanobis generalizada que mide la diferencia entre el vector objetivo \bar{p} y el vector de proporciones observado del proceso \vec{p} .

El estadístico de prueba se obtiene modificando ligeramente la Ecuación (4.21), la cual consiste en fijar el tamaño de muestra, n , en todos los intervalos de muestreo. Esto se expresa como:

$$D_i^2 = \sum_{j=1}^k \frac{n(p_{ij} - \bar{p}_j)^2}{\bar{p}_j} \quad (4.32)$$

Donde D_i^2 es la distancia observada entre $\vec{p}_i = \{p_{ij}\}$, el vector de proporciones observadas, y el valor objetivo $\vec{p} = \{\bar{p}_j\}$. La cantidad p_{ij} es la proporción observada en el i -ésimo intervalo de muestreo de la categoría j , y \bar{p}_j es la proporción objetivo de la categoría j , $j = 1, 2, \dots, k$; $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ (ver sección 4.4).

El procedimiento para seleccionar límite de control empírico (*LCE*) se desarrolló considerando dos partes esenciales.

Parte I. Distribución empírica.

Para esta fase es necesario establecer:

- k , el número de categorías (cantidad de defectos + 1),
- n , el tamaño de muestra con el que se desea operar (debe ser $n > k$) y,
- \vec{p}^T , el vector objetivo.

Si en la práctica, \vec{p}^T se elige arbitrariamente, se recomienda establecer un valor p_0 de acuerdo a los estándares de calidad de la compañía y después utilizar la Ecuación (4.33) para generar el vector completo. Otra forma de obtener el vector objetivo es estimándolo a partir de una base histórica de datos, la cual debe representar el proceso *en-control*. Sin embargo, en ambos casos, se requiere que el proceso opere bajo condiciones estables para poder ser monitoreado. Cabe mencionar que cuando un proceso es inestable, métodos estadísticos pueden ayudar a establecer relaciones entre las variables de entrada y los defectos; con el fin de estabilizar el proceso para cumplir con los requerimientos de calidad (Qiu, 2014).

Entonces, una vez determinados los valores del proceso k , n y \bar{p}^T , deben seguirse los pasos siguientes.

1. Generar vectores aleatorios multinomiales con parámetro \bar{p}^T (se recomienda utilizar simulación Montecarlo).
2. Calcular el estadístico D^2 mediante la Ecuación (4.32), para cada vector aleatorio generado.
3. Pre-seleccionar límites de control (LCP). Para ello, deben obtenerse los percentiles de los valores D^2 calculados, se recomienda obtener los percentiles 0.90 a 0.99 con cambios de 0.1.

Parte II. Selección del límite de control

Para seleccionar el límite de control, es necesario evaluar el desempeño de cada límite de control pre-seleccionado (LCP), suponiendo variaciones en el vector \vec{p}_i ; esto servirá a su vez como mecanismo de validación del método. La medida de desempeño comúnmente usada es el ARL. Se asume que el proceso inicia en control, es decir $\vec{p}_i = \bar{p}$, y en algún momento posterior puede ocurrir un cambio en el proceso ($\vec{p}_i \neq \bar{p}$) entre los intervalos de muestreo. También se supone que las piezas producidas son independientes y cuando el proceso se sale de control, éste permanece así hasta que haya una intervención para regresar al estado *en-control*.

1. Simular escenarios *fuera-de-control*. Para esto, se deben generar vectores aleatorios multinomiales p con parámetro de proporciones p_1 , donde $p_1 \neq \bar{p}$. Se pueden considerar al menos dos casos para la simulación:
 - (a) Suponer que todos los defectos ocurren con la misma probabilidad.
 - (b) Suponer que cada defecto tiene diferente probabilidad de ocurrencia.

En el caso (a), el vector objetivo \bar{p}^T puede obtenerse con la siguiente expresión:

$$\bar{p}^T = [(p_0), (1 - p_0/k), \dots, (1 - p_0/k)] \quad (4.33)$$

En este caso p_0 es la proporción mínima aceptable de piezas buenas en el periodo de producción establecido. Por ejemplo, pueden asignarse valores $p_0 = \{0.90, 0.95, 0.99\}$.

Para simular los escenarios fuera de control, es necesario especificar un vector p_1 que representa variaciones en la calidad, el cual puede calcularse mediante (4.34).

$$p_1 = [(\bar{p}_1 - \rho), (\bar{p}_2 + \rho/k), \dots, (\bar{p}_k + \rho/k)] \quad (4.34)$$

Donde ρ representa una variación en la calidad, en este caso se recomienda considerar cambios de magnitud $\rho = \{0.00, 0.01, 0.02 \dots 0.40\}$. El caso particular $\rho = 0$, corresponde al proceso en estado dentro de control y se emplea para calcular ARL_0 .

Es posible simular los vectores p a partir de distribuciones binomiales independientes, mediante el escalamiento de p para sumar 1 y satisfaciendo la ley multinomial (Kachitvichyanukul and Schmeiser, 1988). En ese sentido, la generación de datos aleatorios binomiales depende solamente del tamaño de muestra y del vector de proporciones.

2. Mediante la Ecuación (4.32), calcular el estadístico D^2 para cada vector aleatorio generado correspondiente a cada escenario fuera-de-control. Note que D^2 está basada en la distancia de Mahalanobis, la cual considera la matriz de covarianzas de la distribución multinomial.
3. Para estimar los valores ARL, se simula la implementación de la carta de control.
 - 3.1 Los valores D^2 calculados en el paso 2, deben compararse con el límite de control correspondiente. A partir de esta comparación se obtiene un vector, v , que puede tomar valores de *ceros* y *unos*, se asigna 0, cuando $D^2 < LCP$ y 1 cuando $D^2 \geq LCP$.
 - 3.2 Obtener la longitud de corrida, es decir, la cantidad de muestras hasta que ocurre una señal fuera de control ($D^2 \geq LCP$). Para ello, se observa cada vector v generado, enumerando los *ceros* que hay hasta el *uno* más próximo, después de cada *uno* se registra el conteo actual y se reinicia el conteo para una iteración posterior. Cada registro corresponde a una longitud de corrida; que servirá para calcular la longitud de corrida promedio (ARL).
 - 3.3 Finalmente, el ARL se calcula como el promedio de las longitudes calculadas resultando una estimación del ARL para cada escenario *fuera-de-control*. Así, para los

valores de k , n y \bar{p} establecidos, pueden dibujarse las curvas de ARL, las cuales corresponden a cada valor ρ y LCP .

4. Selección del límite de control empírico (LCE). Para elegir el límite de control, se comparan las curvas de ARL. Es decir, se selecciona el LCP cuya curva de ARL se aproxime más rápido a 1 con respecto a ρ y presente un $ARL_0 \geq 200$ (o en su lugar, el valor más alto). En el caso de las cartas de control para atributos, un criterio razonable para seleccionar diseños es considerar $ARL_0 \geq 200$ o lo más cercano posible (De Araujo Rodrigues et al. 2011).

Siguiendo la metodología anterior, se obtuvieron diseños para: $k = 4$, los cuales se muestran en la Tabla 4.1. Además, con fines comparativos, se incluyen los diseños correspondientes de la Carta D^2 convencional.

Tabla 4.1. Diseños para las carta D^2 empírica y D^2 (convencional) para $k = 4$.

Caso	p_0	n	Carta D^2 Empírica		Carta D^2	
			ECL	ARL_0	LSC	ARL_0
1	0.9		6.7531	100.7419	48630.1681	>6000
2	0.95	3	7.7992	163.3517	48630.1681	>6000
3	0.99		10.5054	222.1527	48630.1681	>6000
4	0.9		6.3086	115.2890	594.9972	>6000
	0.95	4	6.7018	235.1376	594.9972	>6000
6	0.99		7.7284	200.8734	594.9972	>6000
7	0.9		6.1852	209.2582	147.2835	>6000
8	0.95	5	9.6456	180.3038	147.2835	>6000
9	0.99		12.1268	120.0488	147.2835	>6000
10	0.9		5.8951	186.9446	28.4662	>6000
11	0.95	10	6.0702	193.0958	28.4662	>6000
12	0.99		12.1324	298.0578	28.4662	>6000
13	0.9		5.2719	167.5292	19.8671	>6000
14	0.95	15	5.8577	211.1191	19.8671	>6000
15	0.99		8.9156	141.0744	19.8671	2045.3333
16	0.9		5.0341	172.2079	16.9730	>6000
17	0.95	20	6.0058	180.7009	16.9730	>6000
18	0.99		7.0819	189.2469	16.9730	>6000
19	0.9		4.8273	198.3758	15.5376	>6000
20	0.95	25	6.0084	187.1380	15.5376	>6000
21	0.99		9.7789	198.8774	15.5376	1864.1667
22	0.9		4.7144	188.0109	14.6832	>6000
23	0.95	30	5.2575	169.9843	14.6832	>6000
24	0.99		8.5490	207.3138	14.6832	1483.833

Capítulo 5

Metodología

En este capítulo se presentan el procedimiento que deberá seguirse a fin de aplicar la carta de control D^2 empírica propuesta. Esta metodología se basa en el esquema de implementación tradicional de una carta de control, descrito en la sección 4.1.

El fin es facilitar la toma de decisiones de los especialistas del proceso, reducir la cantidad de piezas defectuosas con un costo de muestreo menor. Además, se simplifica la tarea de monitoreo de múltiples atributos mediante la aplicación de una sola carta.

5.1 Procedimiento para monitorear un proceso empleando la carta D^2 empírica

Fase I: Preliminares y diseño de la carta de control

1. Asegurarse que la carta D^2 empírica sea adecuada a las características de calidad del proceso. Para ello, verifique que sea posible que cada unidad producida pueda clasificarse en $K - 1$ categorías de defectos (características o atributos de calidad) y una categoría de no defectos, es decir, K categorías en total.

Si es posible que la pieza presente más de un atributo simultáneamente se recomienda agregar categorías adicionales para clasificar aquellas piezas que presenten más de un defecto, ver el Capítulo 6 para ilustrar este punto. Las categorías deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivas. Si se cumple, la calidad del proceso puede especificarse en términos de la distribución multinomial con parámetros n y \bar{p} , por lo tanto la carta es adecuada para monitorear el proceso.

2. Elegir el diseño de la carta D^2 empírica de acuerdo a las características del proceso: categorías k , tamaño de muestra n y vector de proporciones objetivo \bar{p} , ver Sección 4.8.1 para determinar \bar{p} y n . En la Tabla 4.1 se muestran diseños que son adecuados para $k = 4$

y algunos valores \bar{p} . En cualquier otro caso utilice la metodología descrita en la Sección 4.8.1, para calcular el valor del Límite de Control Empírico (LCE).

3. Dibujar la carta empleando el valor LCE, el límite inferior es igual a 0. En la Figura 7.4 (a), se muestra la aplicación de la carta en un proceso real.

Fase II: Monitoreo y control del proceso

1. Elegir el intervalo de muestreo. Se recomienda que sean equidistantes, por ejemplo, cada hora o cada 2 horas. Entonces, una muestra de n piezas terminadas se recolecta del proceso en el instante de tiempo elegido.
2. Inspeccionar las piezas con el fin de identificar la presencia de defectos. Cada pieza se clasifica en la categoría correspondiente al defecto que presente. En caso de ausencia de defectos, la pieza se clasifica como conforme o no defectuosa. Después, es necesario contar las piezas por categoría, el resultado se arregla en un vector, al que se le llamará vector de conteos y se denotará con Vc_i^T ; $Vc_i^T = (c_1, \dots, c_k)$. Las categorías deben registrarse siempre en el mismo orden. El i –ésimo elemento de este vector representa c_i la cantidad de piezas clasificadas en la categoría i ($i = 1, \dots, k$).
3. Calcular el vector de proporción observado p_i^T , dividiendo cada elemento del vector de conteos entre el tamaño de muestra n .

$$p_i^T = \left(\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_k}{n} \right) \quad (5.1)$$

4. Calcular D^2 usando la Ecuación (4.32), y graficar el valor resultante en la carta de control. Concluir de acuerdo al siguiente criterio:
 - Si el punto está por debajo del límite de control ($D^2 < ECL$), se declara que el proceso está *dentro-de-control*.
 - Si el punto es encuentra más allá del límite de control ($D^2 \geq ECL$), el proceso se declara como *fuera-de-control* y debe detenerse para evitar la generación de una mayor cantidad de piezas defectuosas.

Hasta este punto solo se han realizado tareas de inspección y monitoreo, pero para lograr el control estadístico del proceso, es necesario que, después de detectar una señal fuera de control, se realice una investigación para determinar la causa que está originando el deterioro en la calidad y eliminarla para regresar el proceso al estado *en-control*.

Capítulo 6

Aplicación y medición del desempeño de la carta D^2 empírica

En este capítulo se muestra la aplicación de la carta propuesta en un proceso de soldadura por fricción y la evaluación del desempeño de la misma. Para ello, se desarrollaron todos los pasos de la metodología descrita en el Capítulo 5.

6.1 Descripción del proceso

El proceso de soldadura por fricción (FSW, por sus siglas en inglés, Friction Stir Welding) es una técnica de unión en sólido desarrollada principalmente para soldar aleaciones ligeras. El proceso requiere el uso de una herramienta cilíndrica de material resistente, el cual se introduce en las piezas, forzando y agitando el material hasta que se logra la soldadura. Durante este proceso, el material es plastificado sin alcanzar el punto de fusión mediante la rotación y avance de la herramienta, generando una microestructura refinada con propiedades mecánicas mejoradas. La Figura 6.1 muestra un esquema del proceso FSW.

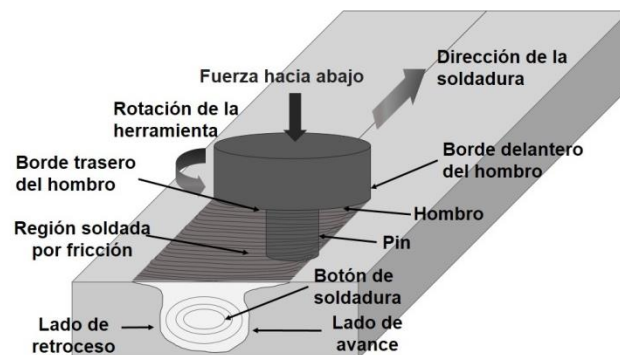


Figura 6.1. Dibujo esquemático del proceso FSW (Rajiv and Murray, 2007).

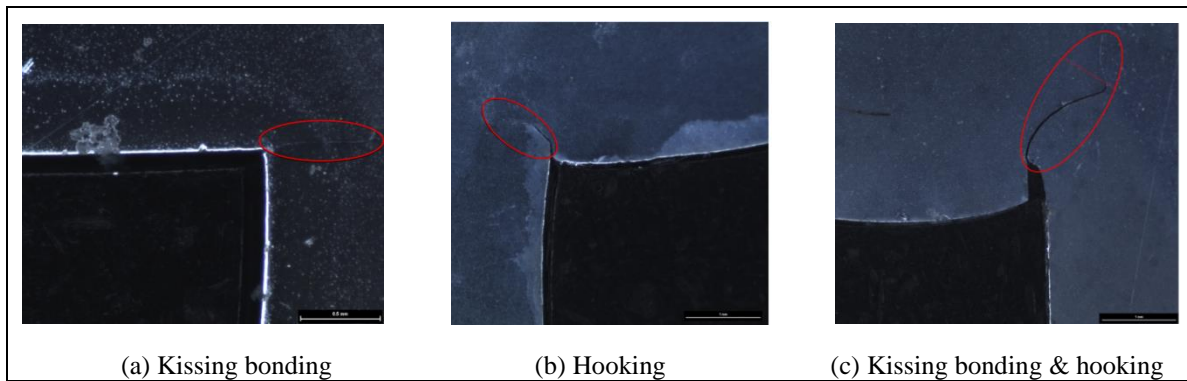


Figura 6.2. Macrografías de piezas defectuosas del proceso FSW.

6.1.1 Inspección en el proceso FSW

Con el fin de evaluar la calidad de las uniones, se emplea inspección visual como primer método (IV). Este paso se realiza para evitar costos innecesarios y determinar si la pieza cumple con la calidad mínima requerida. Algunos defectos presentes en el proceso FSW pueden detectarse usando IV, tales como *exceso de material (flashing)* y *fracturas superficiales* (AWS D17.3, 2010). Sin embargo, un análisis más profundo usando pruebas destructivas debe realizarse a fin de identificar defectos que no son evidentes usando pruebas no destructivas. Por ejemplo, algunos defectos en FSW relacionados con la pérdida de discontinuidad estructural dentro del material identificados como *kissing bonding* y *hooking* (ver Figura 6.2), entre otros (Lohwasser and Zhan, 2001); defectos relacionados con el calor generado por la velocidad de rotación del pin y el incremento en la velocidad de avance. Esto inhibe el incremento de calor en la herramienta, produciendo una consolidación inadecuada en el material (Morales-Bazaldua, 2017). Por lo tanto, considerando que la calidad de una pieza puede determinarse mediante la presencia o ausencia de defectos, la distribución multinomial puede ser empleada para modelar la calidad del proceso FSW mediante el vector de proporciones, el cual incluye información sobre el modo de falla. Este vector es un estadístico suficiente debido a que contiene toda la información acerca de la proporción real de defectos.

6.2 Aplicación de la carta D^2 empírica.

Fase I: Preliminares y obtención de la carta

1. Para monitorear el proceso FSW, se identifican los defectos *kissing bonding* y *hooking* como características de calidad importantes de las uniones soldadas, la apariencia visual de las piezas defectuosas se muestra en la Figura 6.2: (a) *kissing bonding*, (b) *hooking* y (c) *kissing bonding & hooking*.

Ambos defectos pueden aparecer en la misma pieza simultáneamente, así que una categoría extra debe considerarse con el fin de clasificar las piezas con ambos defectos. En el proceso, se considera que los defectos individuales y la característica adicional tienen la misma probabilidad de ocurrencia y es deseable mantener la proporción de piezas conformes en al menos 0.90, el vector de proporciones objetivo se determina con la Ecuación (4.33). Así, una pieza terminada se puede clasificar en una y solo una de las $k = 4$ categorías (incluyendo la categoría de no defectuosos), es decir, se trata de categorías mutuamente excluyentes. En consecuencia, los parámetros de la carta son:

- El número de categorías es $k = 4$
 - El tamaño de muestra es $n = 5$.
 - El vector objetivo es $\bar{p}^T = (0.0333, 0.0333, 0.0333, 0.9)$.
2. De acuerdo a las características del proceso, se elige el diseño 7 de la Tabla 4.1 con límite de control $LCE = 6.1852$; el cuál es el más adecuado para monitorear el proceso FSW.
 3. Dibujar la carta empleando el valor LCE. La Figura 6.4 (a) muestra la aplicación en el proceso FSW.

Fase II: Monitoreo del proceso

1. De acuerdo al intervalo elegido, cada 2 horas se tomará una muestra de $n = 5$ piezas terminadas del proceso FSW.

2. Se inspeccionan las piezas con el fin de identificar la presencia de defectos. Se obtiene el vector de conteos. Los resultados de la inspección y clasificación de 5 muestras de tamaño 5 se muestra en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1. Datos registrados de un proceso FSW local.

Muestra	Kissing bond	Hooking	Kissing bond & Hooking	No defectuosas
1	0	0	0	5
2	1	1	1	2
3	3	0	0	2
4	1	0	2	2
5	1	1	2	1

Las columnas 1-3 corresponden a los conteos de las categorías de defectos; y la columna 4 es para el conteo de piezas no defectuosas.

3. Calcular el vector de proporción observado p_i^T , mediante la Ecuación (5.1); los resultados se muestran en la Tabla 6.2.
4. Calcular D^2 usando la Ecuación (4.32) y dibujar la carta. Los resultados se muestran en la Tabla 6.2 y la carta se muestra en la Figura 6.3 (a).

Tabla 6.2. Proporciones observadas del proceso FSW.

Muestra	Kissing bond	Hooking	Kissing bond & Hooking	No defectuosas	D^2
1	0	0	0	1	0.5556*
2	0.2	0.2	0.2	0.4	13.8889
3	0.6	0	0	0.4	49.8889
4	0.2	0	0.4	0.4	25.8889
5	0.2	0.2	0.4	0.2	31.2222

*Dado que todas las piezas son no defectuosas, este valor en particular indica mejora en la calidad.

Los datos mostrados en la Tabla 6.1 son preliminares a la implementación de la carta. Para fines ilustrativos y comparativos, en las Figuras 6.3 (a) y 6.3 (b), se muestran las cartas de control D^2 empírica y la D^2 convencional, respectivamente. Note que el límite de control de la carta D^2 convencional se calculó con la Ecuación (4.21). A continuación, la interpretación se realiza de acuerdo a los criterios establecidos en el paso 4 de la Fase II.

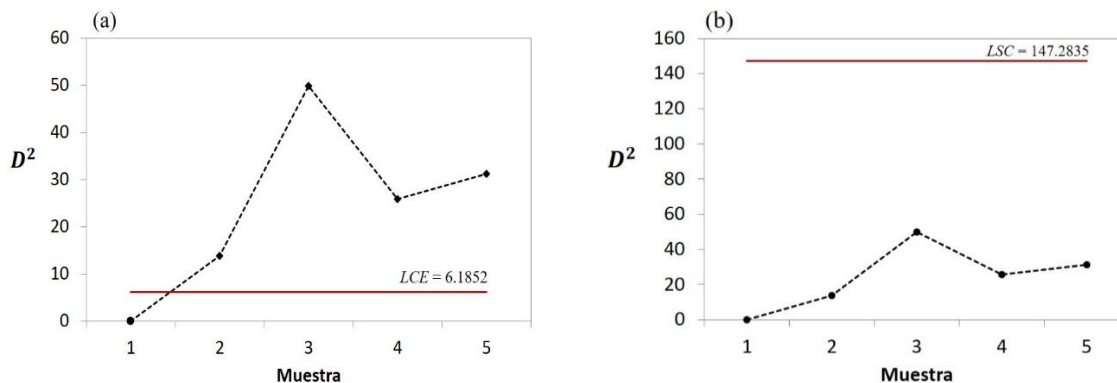


Figura 6.3. (a) Carta de control D^2 empírica y (b) Carta de control D^2 convencional.

En la Figura 6.3 puede observarse que el proceso inicia *dentro-de-control*. En el segundo muestreo ocurre un cambio, el cual solo es detectado por la carta D^2 empírica. Debido a que se trató de una fase preliminar, no se realizó ninguna acción correctiva y el proceso continuó operando.

Es importante resaltar que la carta convencional no detectó ninguna variación, lo cual evidencia el problema de utilizar una aproximación asintótica a la distribución teórica para calcular el límite de control en un caso donde el tamaño de muestra es insuficiente. Por su parte, la carta propuesta indica que el proceso está *fuera de control* desde la segunda muestra, lo cual es una representación más precisa de la realidad.

6.3 Desempeño de la carta D^2 empírica en el proceso FSW

Con el fin de investigar el efecto del tamaño de muestra y comparar el desempeño de ambos métodos (empírico y convencional), se obtuvieron los valores de ARL mediante simulación Montecarlo. Los resultados se muestran en la Figura 6.4; cada línea punteada representa los valores de ARL para diferentes tamaños de muestra y varios cambios en la calidad de magnitud ρ . Las gráficas para $n < 10$ correspondientes a la carta D^2 convencional no se muestran, ya que los valores de ARL excedieron el número de ciclos computacionales empleado en la simulación (6000). De la misma forma, para casos con $n \geq 10$ y algunos valores ρ ; con fines comparativos se decidió fijar $ARL = 6000$.

Se puede observar en la Figura 6.4 (a) que el desempeño de la carta D^2 es pobre en términos de ARL; la mejor eficiencia es para $n = 30$ y la peor es para $n = 10$. Todos los escenarios presentan valores de ARL tan grandes (mayores a 6000) para valores ρ pequeños. Adicionalmente, el comportamiento es caótico en diferentes intervalos de ρ . Por lo tanto, para todos los tamaños de muestra probados, la carta convencional es completamente inconveniente debido a la enorme insensibilidad e inestabilidad para detectar cambios en la calidad. En este sentido, se concluye que el uso de la carta D^2 convencional no es adecuado para $n \leq 30$, así que no se recomienda para el proceso FSW estudiado y otros similares en los que haya restricciones sobre el tamaño de muestra.

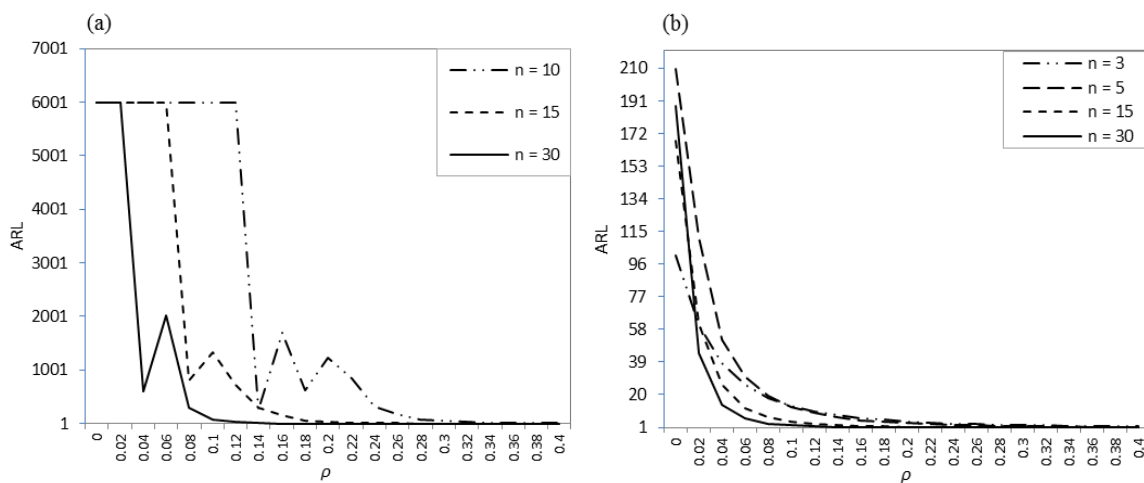


Figura 6.4. (a) ARL para la carta D^2 y (b) ARL para la carta D^2 empírica.

Por otro lado, como puede observarse en la Figura 6.4 (b), el método empírico muestra mejor desempeño, más sensibilidad y estabilidad conforme ρ incrementa, es decir, conforme la calidad decrece. La mejor eficiencia es para $n = 30$ y conforme el tamaño de muestra decreciente, la eficiencia también, sin embargo, el desempeño es satisfactorio en todas los escenarios probados. En consecuencia, se puede concluir que la eficiencia de la carta de control D^2 empírica, para ($n \leq 30$), es mejor en términos de ARL con respecto a la carta convencional. Entonces, la carta D^2 empírica es una opción confiable para monitorear el proceso FSW estudiado y procesos similares.

Con base en los resultados obtenidos, es posible asegurar que la carta de control D^2 con límites empíricos puede implementarse en la línea de producción para monitorear el proceso estudiado y, adicional a las ventajas que tiene el proceso FSW sobre las propiedades mecánicas, será posible analizar la capacidad del proceso para producir uniones soldadas con la calidad deseada. Dado lo anterior, la industria automotriz puede adoptar la carta de control propuesta cuando se emplee FSW para soldar piezas metálicas.

Note que, aunque se estudió el desempeño solo para tamaños de muestra de interés, la carta D^2 empírica también puede utilizarse con muestras mayores a 30. Sin embargo, para casos en los que $n \geq 500$, es posible utilizar la carta D^2 convencional o la carta D^2 de doble muestreo combinado presentada en el Apéndice A2.

Capítulo 7

Conclusiones

Esquemas de control estadístico para atributos implican, en general, el uso de una gran cantidad de datos, para asegurar cierta precisión en las pruebas estadísticas. Sin embargo, existen situaciones donde generar toda la información requerida no es posible debido a cuestiones que pueden ser meramente técnicas o que implican un costo alto. Esto representa un problema que debe ser atendido, sin embargo, son pocos los trabajos enfocados a ello. En cumplimiento con el objetivo general de esta investigación, se desarrolló una herramienta de monitoreo estadístico para procesos multi-atributo que resuelve el problema que representa el uso de tamaños de muestra insuficientes.

La carta de monitoreo D^2 empírica propuesta, se basa en una generalización de la distancia de Mahalanobis (D^2) al caso multinomial y en un enfoque empírico. Se proporciona un método general para la obtención del límite de control modificado con base en la distribución empírica del estadístico de prueba D^2 . Se utilizó el ARL como criterio de evaluación del desempeño, con el cual se cumple el objetivo particular 1.

Se hizo una comparación entre ambos esquemas: la carta D^2 convencional y la carta propuesta. Dicha comparación se hizo en términos del ARL, en el contexto de un proceso de soldadura por fricción. Los resultados sugieren, que la carta D^2 empírica es mejor en todos los escenarios analizados.

El caso de estudio y los resultados presentados en esta tesis dan lugar a las siguientes conclusiones específicas:

La norma AWS establece que debe usarse inspección visual sobre pruebas destructivas y examen de rayos-X para identificar defectos internos en piezas soldadas por fricción, entonces una carta de control multi-atributo resulta adecuada para el proceso de estudio; considerando las características de calidad categóricas.

Las cartas de control multi-atributo requieren tamaños de muestra grandes para lograr un buen desempeño, esto no es recomendable para el proceso FSW debido al uso de pruebas destructivas durante la inspección.

Se emplearon ambos esquemas, el convencional y el propuesto, para monitorear el proceso. El resultado indica que la carta propuesta representa mejor la realidad, ya que detectó los cambios en el vector de proporciones observado, mientras que la convencional no detectó ningún cambio.

Se comparó el desempeño de la carta convencional y propuesta en términos de ARL. Los resultados sugieren que la carta convencional no es eficiente cuando el tamaño de muestra es $n \leq 30$ (rango de interés), por lo tanto, esta carta no debe utilizarse en el proceso bajo estudio, ya que puede conducir a conclusiones erróneas sobre el estado del proceso. Sin embargo, a través del uso de límites de control empíricos se logró mejorar el desempeño de la carta sobre tamaños de muestra del rango de interés. Por lo tanto, la carta D^2 empírica es una opción apropiada para el proceso estudiado y para otros similares, en los que existan restricciones naturales o prácticas sobre el tamaño de muestra; con lo anterior se da cumplimiento al objetivo específico 3.

En cumplimiento con el objetivo específico 2, en la Tabla 4.1 se muestran diseños del gráfico propuesto, los cuales son útiles para monitorear $k = 4$ categorías. Sin embargo, mediante el procedimiento descrito en la sección 4.8.1, es posible diseñar la carta D^2 empírica para cualquier número de categorías (defectos), $k > 2$, sin restricción para tamaños de muestra mayores a 30. Cabe mencionar que el criterio de selección de los límites es el ARL. Por lo tanto la hipótesis de investigación se cumple satisfactoriamente, así, es posible afirmar que con el uso de la distribución empírica del estadístico D^2 para

calcular límites de control pueden obtenerse diseños de monitoreo eficientes, en términos de ARL, para muestras de tamaño pequeño en relación al número de categorías.

Considerando los resultados obtenidos, la carta propuesta puede implementarse en la línea de producción para monitorear el proceso FSW con las características de calidad consideradas. Teniendo en cuenta las ventajas que tiene el proceso FSW sobre las propiedades mecánicas de las uniones, la carta D^2 empírica puede ser un complemento de procesos FSW.

Adicionalmente para mejorar el desempeño de la carta propuesta, es posible ponderar los defectos más severos. De manera que si esos defectos ocurren la carta señale un estado fuera de control, inmediatamente. Por otra parte, es necesario investigar un método para identificar los atributos que con mayor probabilidad induce una señal fuera de control, así también un método para calcular un índice de capacidad de proceso, lo cual representa una oportunidad de investigación futura.

Referencias Bibliográficas

- American National Institute of Standards. AWS D17.3 / D17. 3M: 2010; Specification for friction stir welding of aluminum alloys for aerospace applications.
- Bersimis, S., S. Psarakis and J. Panaretos. 2007. Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview. *Quality and Reliability Engineering International*. 23:517–543.
- Bezerra, E. L., Ho L. L. H., Costa R. Q. 2018. G_{S2} : An optimized attribute control chart to monitor process variability. *International Journal of Production Economics*. 195: 287–295.
- Bishop, Y. M. M., Fienberg S. E., and Holland, P.W. 2007. *Discrete Multivariate Analysis Theory and Practice*. Springer, MIT Press.
- Cassady C. Richard y Nachlas Joel A. 2006. Evaluating and Implementing 3-Level Control Charts. *Quality Engineering*. 18:285-292.
- Champ, C. W. and Aparisi F. 2008. Double Sampling Hotelling's T2 Charts. *Quality and Reliability Engineering International*. 24:153–166.
- Chia-Ding, Hou, Shao Yuehjen E. and Huang Shen. 2012. A Combined MLE and Generalized P Chart Approach to Estimate the Change Point of a Multinomial Process. *Applied Mathematics & Information Sciences– An International Journal*. 6: 53-59.
- Chiu J. and Kuo T. 2007. Attribute Control Chart for Multivariate Poisson Distribution, *Communications in Statistics—Theory and Methods*. 37: 146–158.
- Cochran, W. G. 1954. Some Methods for Strengthening the Common χ^2 Tests. *Biometrics* 10: 417-451.
- Costa, R. Q., Bessegato, L. F. and Cruz, F. R. B. 2017. An attribute inspection control chart for process mean monitoring. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 90: 2991-2999.

- Cozzucoli Paolo. 2009. Process Monitoring with Multivariate p-Control Chart, *International Journal of Quality, Statistics and Reliability*, Volume 2009, Article ID 707583.
- Daudin, J.J. 1992. Double Sampling X Charts. *Journal of Quality Technology* 24 (2): 78–87.
- De Araujo Rodrigues, Aurelia Aparecida, Epprecht, Eugenio Kahn and De Magalhaes, Maysa Sacramento. 2011. Double-sampling control chart for attributes, *Journal of Applied Statistics*, 38: 1, 87 – 122. First published on: June 2010 (iFirst)
- Epprecht, E. K., Bruno F. T. Simões and Flávia C. T. Mendes. 2010. A variable sampling interval EWMA chart for attributes. *Int J Adv Manuf Technol.* 49:281–292
- Ghute, V. B. and D. T. Shirke. 2008. A multivariate synthetic control chart for process dispersion. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 5, No. 3, pp. 271-288.
- Hammerley, J.M. and Handscomb, D.C. 1964. *Monte Carlo Methods*. Fletcher & Son Ltd. Great Britain.
- Haridy, Salah, Zhang Wu , Kazem Abhary , Philippe Castagliola & Mohammad Shamsuzzaman. 2013. Development of a multiattribute synthetic- np chart, *Journal of Statistical Computation and Simulation.*, DOI:10.1080/00949655.2013.769541.
- Haridy, Salah, Zhang Wu, Songlin Chen and Sven Knoth. 2014. Binomial CUSUM chart with curtailment. *International Journal of Production Research.* 52:15. 4646 – 4659.
- Ho, L. L. & Costa, R. Q. 2016. Combining attribute and variable data to monitor process variability: MIX S2 control chart *Int J Adv Manuf Technol.* 87:3389–3396.
- Jolayemi Joel K. 1999. A Statistical Model for the Design of Multiattribute Control Charts. *The Indian Journal of Statistics*, Series B, Vol. 61, No. 2, pp. 351 -365 Published by: Indian Statistical Institute Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/25053089>.

- Kooli I. and M. Limam. 2011. Economic Design of an Attribute np Control Chart Using a Variable Sample Size. *Sequential Analysis: Design Methods and Applications*. 30:2. 145-159.
- Leoni RC, Costa AFB. 2018. The Shewhart attribute chart with alternated charting statistics to monitor bivariate and trivariate mean vectors. *Computers & Industrial Engineering*. 122:273-282.
- Li, J., Tsung, F. & Zou, C., 2014. Multivariate binomial/multinomial control chart. *IIE Transaction*. 46(5), pp. 526-524.
- Li, Yanting and Fugee Tsung. 2011. Multiple Attribute Control Charts with False Discovery Rate Control. *Quality and Reliability Engineering International*. DOI: 10.1002/qre.1276.
- Lohwasser D. and Zhan C. 2001. Friction stir welding, from basics to applications. Woodhead Publishing. *IEEE Trans. Evol Comput*. 6:182-197.
- Madadi, M. H. and Mahmoudzadeh M. 2017. A fuzzy development for attribute control chart with Monte Carlo simulation method. *Management Science Letters*. 7:555–564.
- Marcucci M. 1985, Monitoring multinomial processes, *Journal of Quality Technology*; 17(2): 86-91.
- Mardia K.V., J.T. Kent, and J.M. Bibby. 1979. *Multivariate Analysis*, Academic Press, London.
- Mason R. L. and Joung J. C. *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics American Statistical Association, Philadelphia, PA. 2002.
- Melo M. S., Lee H. L. and Medeiros P. G. 2017. Max D: an attribute control chart to monitor a bivariate process mean. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 90: 3489-498.

- Montgomery C. D., and Runger C. G. 2007. *Probabilidad y Estadística aplicadas a la ingeniería*. Ed. Mc Graw Hill. Año de impresión 2007.
- Morales- Bazaldúa, Cindy Estefanía. 2017. Influencia de los parámetros de proceso en la disminución de discontinuidades presentes en uniones en T de aleaciones de Aluminio 2024 T3/T351 soldadas por el proceso FSW. Corporación Mexicana de Investigación en Materiales División de estudios de posgrado, Saltillo, Coahuila, México.
- Mukhopadhyay, A. R. 2008. Multivariate attribute control chart using Mahalanobis D^2 statistic. *Journal of Applied Statistics*. Vol. 35, No. 4: 421-429.
- Niaki, Seyed Taghi A. & Babak Abbasi. 2007. Bootstrap method approach in designing multi-attribute control charts. *Int J Adv Manuf Technol* 35:434–442.
- Niaki, Seyed Taghi A. & Babak Abbasi. 2007. On the monitoring of multi-attributes high-quality production processes. *Metrika*. 66:373–388.
- Niaki, Seyed Taghi A. & Shirin Akbari Nasaji. .2011. A hybrid method of artificial neural networks and simulated annealing in monitoring auto-correlated multi-attribute processes. *Int J Adv Manuf Technol* 56:777–788.
- Perez B., Elena, José M. Jalaboyes V., Andrés Carrión G., 2003, Aplicación de la metodología de Daudin a los gráficos por atributos, *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa Lleida*.
- Qiu, Peihua. 2014. *Introduction to statistical process control*, CRC Press. Florida, USA.
- Rajiv S. M. and Murray W. M. 2007. *Friction Stir Welding and Processing*, ASM International. pp 1-5.
- Ross, Sheldon M. 2013. *Simulation Fifth Edition*. Academic Press. Amsterdam, The Netherlands.
- Taleb H., Mohamed Limam. 2006. Multivariate Fuzzy Multinomial Control Charts. *Quality Technology & Quantitative Management* Vol. 3, No. 4, pp. 437-453.

- Topalidou E. and Psarakis S. 2009. Review of Multinomial and Multiattribute Quality Control Charts, *Quality and Reliability Engineering International*. 25:773-804.
- X. S Lu. 1998. Control chart for multivariate attribute processes, *International Journal of Production Research*. Volume 36. Issue 12. 3477 – 3489.
- Wackerly, Dennis D., William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer. 2008. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Séptima Edición. Publicado en inglés por Thomson/Brooks-Cole.
- Wibawati, Mashuri, M., Purhadi, Irhamah, Ahsan, M. 2018. Performance Fuzzy Multinomial Control Chart. *2nd International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research, IOP Conf. Series: Journal of Physics*. Conf. Series 1028 012120.

Apéndice A1: Potencia de la carta D^2 de Mahalanobis (convencional)

La potencia, P , de una prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula; esto es, la probabilidad de que la carta de una señal *fuera de control*. Cuando la hipótesis nula es cierta, es deseable que P tome un valor pequeño y cuando es falsa, es deseable que P tome un valor grande.

Debido a que se supone que la distribución del estadístico se aproxima a una distribución F , la potencia de la carta D^2 de Mahalanobis puede evaluarse mediante la siguiente expresión:

$$P(\lambda) = \int_{F_{\alpha, v_1, v_2}}^{\infty} f(x; v_1, v_2; \lambda) dx \quad (\text{A1.1})$$

donde α , la probabilidad de un error tipo I, es fijo y la cantidad F_{α, v_1, v_2} es el punto percentil $(1 - \alpha)$ de una distribución F central con v_1 y v_2 grados de libertad.

La cantidad F_{α, v_1, v_2} se usó para evaluar $P(\lambda)$ para α, v_1, v_2 fijos y diferentes valores de λ , el parámetro de no centralidad de una distribución F no central (Graybill, 1976).

De hecho, α puede fijarse en 0.01 con v_1 y v_2 obtenidos a partir de:

$$v_1 = C - 1$$

Donde C es el número de categorías de defectos del proceso incluyendo la categoría de piezas buenas. Y ,

$$v_2 = n - C + 2$$

Sin embargo, ya que la expresión para calcular el límite de control de la carta se basa en suposiciones distribucionales asintóticas, es razonable pensar que la carta puede ser deficiente cuando el tamaño de muestra es pequeño. Vea que Mardia et al establecen que si $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces $m(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{M} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, m)$, esto es cierto solo si el vector \mathbf{x} sigue una distribución **normal multivariada** (Mardia et al. 1979). Por otro lado, el estadístico D^2 definido en la Ecuación (4.21), es una generalización al caso multinomial, en este caso p_i tiene una distribución multinomial con parámetro \bar{p}^T (Mukhopadhyay, 2008). Aunque la distribución de p_i puede aproximarse a una distribución **normal multivariada**, tal aproximación es asintótica de acuerdo al tamaño de muestra (ver sección A1.1). De esta

forma, si el tamaño de muestra no es lo suficientemente grande, esta suposición podría no cumplirse y la eficiencia de la carta de control se afectaría seriamente.

De este análisis surge la necesidad de investigar cual es el tamaño de muestra para el que se cumplen las suposiciones distribucionales anteriores. Con este fin, se realizaron pruebas de bondad de ajuste del estadístico D^2 a la distribución F (distribución empleada en la Ecuación 4.22). Los valores del estadístico se generaron mediante el método Monte Carlo.

En particular, se analizó el caso de ejemplo mostrado en Mukhopadhyay (2008), se generaron vectores aleatorios multinomiales con $k = 7$ categorías y parámetro $\bar{p}^T = (0.78, 0.08, 0.06, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02)$. Se incrementó el tamaño de muestra desde $n = 20$ (el menor empleado en el ejemplo) hasta $n = 6000$. Se utilizó la prueba Kolmogorov-Smirnov para cada caso y se encontraron valores p mayores a 0.05 a partir de tamaños de muestra $n \geq 500$. En consecuencia, puede decirse que el estadístico D^2 sigue una distribución F siempre que el tamaño de muestra sea $n \geq 500$. Puede deducirse, que al menos para el caso analizado, no es adecuado emplear la carta D^2 con tamaños de muestra menores a 500.

De acuerdo a la nota anterior, la Ecuación (A1.1) solo es válida para $n \geq 500$, en el mejor de los casos.

Sin embargo, se decidió estudiar el desempeño de la carta convencional tomando como ciertas las suposiciones, para observar su comportamiento teórico. Para ello, se obtuvo la curva de potencia para diferentes números de categorías $k = \{3, 6\}$ y con tamaños de muestra $n = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100\}$. Los resultados se muestran en Figura A1.1 y A1.2, respectivamente.

Como puede observarse en las Figura A1.1 y A1.2, también teóricamente el tamaño de muestra tiene una influencia importante en el desempeño de la carta. En teoría, la carta tiene el mejor desempeño cuando $n = 100$ y el peor cuando $n = 10$. Aunque en Mukhopadhyay (2008) se menciona que la carta es apta para cualquier tamaño de muestra, con los resultados obtenidos, se demuestra que la carta puede no ser eficiente cuando el

tamaño de muestra es insuficiente, es decir, aun tomando como ciertas las suposiciones distribucionales (las cuales se mostró que no lo son), la carta tendría un desempeño muy pobre. Las curvas con el peor desempeño para $k = 3$ son las que corresponden a $n = \{10, 20, 30\}$ y para $k = 6$ son $n = \{10, 20, 30, 40, 50\}$.

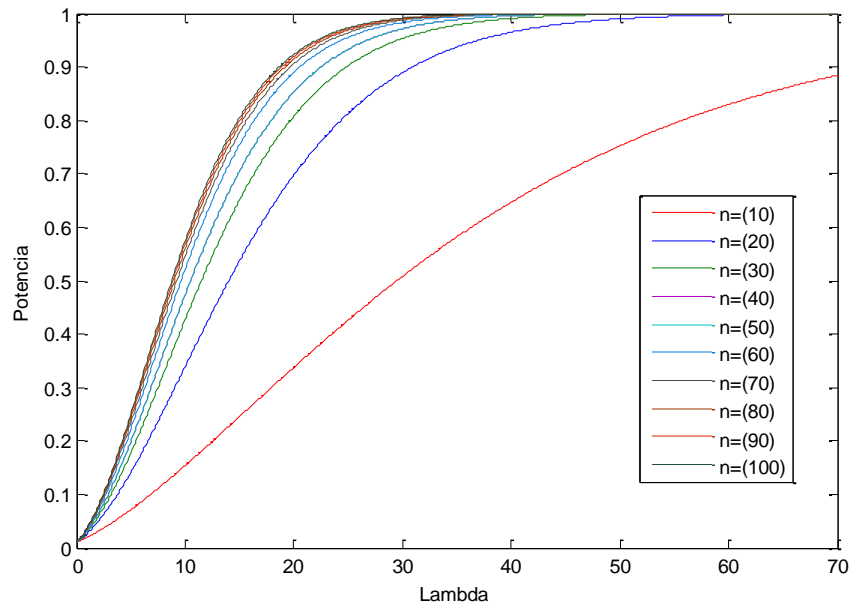


Figura A1.1 Curvas de potencia de la carta D^2 para $k = 3$.

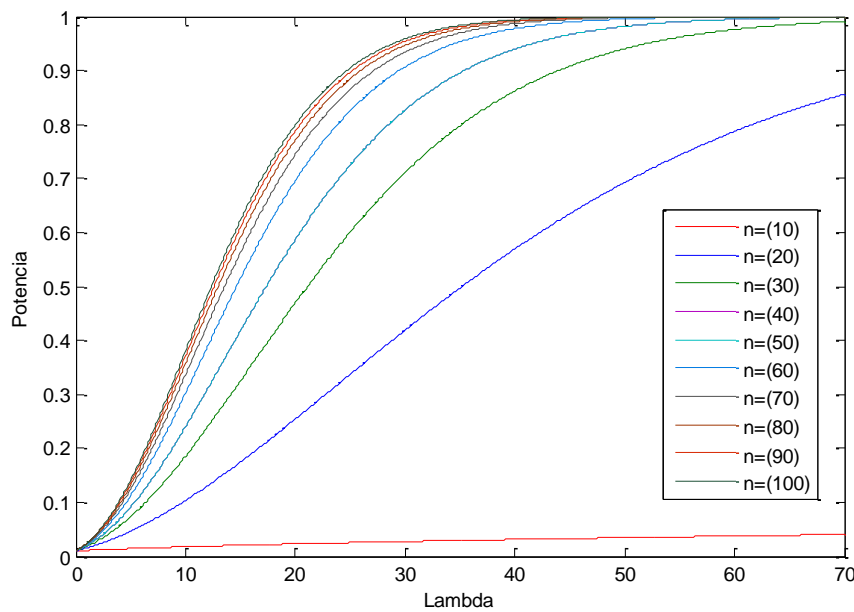


Figura A1.2 Curvas de potencia de la carta D^2 para $k = 6$.

A1.1 Normalidad asintótica de la distribución multinomial

Sea $\mathbf{X}_n = (x_{n1} \dots x_{nT})$ que tenga una distribución multinomial $M(n, \mathbf{p})$, donde $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_T)$. Podemos que:

$$E(\mathbf{X}_n) = n\mathbf{p}$$

$$Cov(\mathbf{X}_n) = n(\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p})$$

Cuando D_p denota la matriz diagonal basada en \mathbf{p} .

Sea $\hat{\mathbf{p}} = n^{-1}\mathbf{X}_n$ el vector de proporciones muestrales y $\mathbf{U}_n = \sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})$, entonces

$$E(\mathbf{U}_n) = \mathbf{0}$$

$$Cov(\mathbf{U}_n) = \mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p}$$

Teorema: $\mathcal{L}[\mathbf{U}_n] \rightarrow \mathcal{L}[\mathbf{U}]$ donde \mathbf{U} tiene una distribución normal multivariada con vector de medias $\mathbf{0}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p}$.

Demostración

Calcular la Función Generatriz de Momentos (FGM) de \mathbf{U}_n y mostrar que converge a la de \mathbf{U} .

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{U}_n}(t) &= E[e^{t_1 U_{n1} + \dots + t_T U_{nT}}] = E[e^{t'\mathbf{U}_n}] \\ &= E[e^{tn^{1/2}\mathbf{X}_n' - \sqrt{n}t\mathbf{p}'}] = e^{-\sqrt{n}t\mathbf{p}'} M_{\mathbf{X}_n}(n^{1/2}\mathbf{t}) \end{aligned}$$

Tenemos que,

$$M_{\mathbf{X}_n}(t) = \left(\sum_j p_j e^{t_j} \right)^n$$

Así que:

$$M_{\mathbf{U}_n}(t) = e^{-\sqrt{n}t\mathbf{p}'} \left(\sum_j p_j e^{t_j} \right)^n = \left(\sum_j p_j e^{n^{-1/2}(t_j - t\mathbf{p}')} \right)^n$$

Ya que,

$$e^x = 1 + x + 1/2x^2 + o(x^2) \text{ como } x \rightarrow 0.$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{U}_n}(t) &= \left(\sum_j p_j (1 + n^{-1/2} (t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}') + (2n)^{-1}(t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}')^2 + o(n^{-1})) \right)^n \\ &= (1 + n^{-\frac{1}{2}} \sum_j p_j (t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}') + (2n)^{-1} \sum_j p_j (t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}')^2 + o(n^{-1}))^n \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_j p_j (t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}') &= 0 \\ \sum_j p_j (t_j - \mathbf{t}\mathbf{p}')^2 &= \mathbf{t}(\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p})\mathbf{t}' \end{aligned}$$

Así que,

$$M_{\mathbf{U}_n}(t) = (1 + n^{-1} \frac{1}{2} \mathbf{t}(\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p})\mathbf{t}' + o(n^{-1}))^n \quad (\text{A1.2})$$

Aquí, concluimos que

$$M_{\mathbf{U}_n}(t) \rightarrow M(t) = e^{\frac{1}{2} \mathbf{t}(\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p})\mathbf{t}'} \quad (\text{A1.3})$$

Pero $M(t)$ es la FGM de la distribución normal multivariada con vector de medias $\mathbf{0}$ y matriz de covarianzas $\mathbf{D}_p - \mathbf{p}'\mathbf{p}$ (Bishop et al, 2007).